



Math93.com

Baccalauréat 2017 - S Métropole

Série S Obli. et Spé.
21 Juin 2017
Correction

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter



Remarque : dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux! Il est par contre nécessaire de numérotter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.

Exercice 1. Fonctions

7 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $h(x) = xe^{-x}$.

1. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.

Propriété 1 (Limites liées à la fonction exponentielle)

$$\bullet (1) : \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \left| \quad \bullet (2) : \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \quad \left| \quad \bullet (3) : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Pour tout réel x de $[0; +\infty[$ on a

$$h(x) = xe^{-x} = \frac{x}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x}}$$

Donc d'après la relation (1) de la propriété 1 on a par composition des limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0}$$

2. Étudier les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.

$$f : \begin{cases} [0; +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) = x \times e^{-x} \end{cases}$$

La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$.

La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in [0; +\infty[; f(x) = u(x) \times v(x) : \begin{cases} u(x) = x & ; u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{-x} & ; v'(x) = (-e^{-x}) \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x})$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [0; +\infty[; f'(x) = (1 - x)e^{-x}}$$



La fonction dérivée h' s'exprime comme produit de deux facteurs. Le facteur e^{-x} est strictement positif sur $[0; +\infty[$ car la fonction exponentielle est strictement positive sur \mathbb{R} . De ce fait, h' est du signe du facteur $(1-x)$ dont l'étude du signe est aisée.

$$\text{Pour tout } x \text{ de } [0; +\infty[: \begin{cases} 1-x=0 \iff x=1 \\ 1-x < 0 \iff x > 1 \end{cases} \implies 1-x > 0 \iff x < 1$$

Donc on a :

| | | | |
|-------------------|---|------------------------|-----------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
| Signe de $h'(x)$ | | + | 0 - |
| Variations de h | 0 | $e^{-1} \approx 0.368$ | 0 |

3. L'objectif de cette question est de déterminer une primitive de la fonction h .

3. a. Vérifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on a $h(x) = e^{-x} - h'(x)$ où h' désigne la fonction dérivée de h .

Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} e^{-x} - h'(x) &= e^{-x} - (1-x)e^{-x} \\ &= e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} \\ &= xe^{-x} \\ e^{-x} - h'(x) &= \underline{h(x)} \end{aligned}$$

3. b. Déterminer une primitive sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de la fonction $x \rightarrow e^{-x}$.

Une primitive sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de la fonction $x \rightarrow e^{-x}$ est par exemple la fonction

$$x \rightarrow -e^{-x}$$

3. c. Dédurre des deux questions précédentes une primitive de la fonction h sur l'intervalle

La primitive d'une différence est la différence des primitive donc une primitive de h' étant h , une primitive de

$$x \rightarrow e^{-x} - h'(x)$$

est

$$x \rightarrow -e^{-x} - h(x) = -e^{-x} - xe^{-x} = (-1-x)e^{-x}$$

Une primitive de h est donc par exemple la fonction H définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$H(x) = \underline{(-1-x)e^{-x}}$$

**Partie B**

On définit les fonctions f et g sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = xe^{-x} + \ln(x+1)$ et $g(x) = \ln(x+1)$. On note \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les représentations graphiques respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé. Ces deux courbes sont tracées en annexe page 8. Cette annexe est à rendre avec la copie.

1. Pour un nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on appelle M le point de coordonnées $(x; f(x))$ et N le point de coordonnées $(x; g(x))$: M et N sont donc les points d'abscisse x appartenant respectivement aux courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

1. a. Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale et donner cette distance maximale.

On est dans un repère orthonormé, donc la distance MN est donnée par :

$$\begin{aligned} MN^2 &= (g(x) - f(x))^2 \\ &= \left(\ln(x+1) - (xe^{-x} + \ln(x+1)) \right)^2 \\ &= (\ln(x+1) - xe^{-x} - \ln(x+1))^2 \\ &= (-xe^{-x})^2 \\ &= (xe^{-x})^2 \\ MN^2 &= (h(x))^2 \end{aligned}$$

Or on a vu lors de la question (2.) de la partie A que la fonction h était positive (ou nulle) sur $[0; +\infty[$. En effet les variations de h prouvent que son minimum sur $[0; +\infty[$ est 0, atteint pour $x = 0$. On a donc :

$$MN^2 = (h(x))^2 \iff MN = h(x)$$

Toujours d'après la question (A.2.), on sait que le maximum de h sur $[0; +\infty[$ est atteint pour $x = 1$ et que ce maximum est :

$$h(1) = e^{-1} \approx 0,368$$

1. b. Placer sur le graphique fourni en annexe page 8 les points M et N correspondant à la valeur maximale de MN .

Les points M et N correspondant à la valeur maximale de MN sont d'abscisse 1 or on a :

$$\begin{cases} f(1) = 1 \times e^{-1} + \ln(1+1) = e^{-1} + \ln 2 \approx 1,061 \\ g(1) = \ln 2 \approx 0,693 \end{cases}$$

donc on a :

$$M(1; f(1)) = M(1; e^{-1} + \ln 2) \quad \text{et} \quad N(1; \ln 2)$$

2. Soit un réel appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$. On note D_λ le domaine du plan délimité par les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g et par les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$.

2. a. Hachurer le domaine correspondant à la valeur proposée sur le graphique en annexe page 8.

2. b. On note A_λ l'aire du domaine D_λ , exprimée en unités d'aire. Démontrer que $A_\lambda = 1 - \frac{\lambda + 1}{e^\lambda}$.

- Puisque la fonction exponentielle est strictement positive sur \mathbb{R} , et que x est positif sur $[0; +\infty[$, le terme xe^{-x} est positif sur $[0; +\infty[$. de ce fait pour tout réel x de $[0; +\infty[$ on a :

$$f(x) = xe^{-x} + \ln(x+1) \geq \ln(x+1) \iff f(x) \geq g(x)$$

- L'expression $(f(x) - g(x))$ est donc positive (ou nulle) sur $[0; +\infty[$ et continue (donc intégrable), de ce fait l'aire A_λ du domaine D_λ s'exprime, en unités d'aire, par :

$$A_\lambda = \int_0^\lambda (f(x) - g(x)) \, dx \quad \text{u.a.}$$

Or pour tout x de $[0; +\infty[$, on a vu que :

$$(f(x) - g(x)) = xe^{-x} = h(x)$$

Dans la question (A.3c) on a déterminé une primitive de h sur $[0; +\infty[$ que l'on a noté H définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$H(x) = \underline{(-1-x)e^{-x}}$$



On a donc :

$$\begin{aligned} A_\lambda &= \int_0^\lambda (f(x) - g(x)) dx \\ &= H(\lambda) - H(0) \\ &= (-1 - \lambda) e^{-\lambda} - (-1 - 0) e^{-0} \\ &= (-1 - \lambda) e^{-\lambda} + 1 \\ &= -\frac{1 + \lambda}{e^\lambda} + 1 \end{aligned}$$

On a donc montré que :

$$A_\lambda = 1 - \frac{\lambda + 1}{e^\lambda}$$

2. c. Calculer la limite de A_λ , lorsque tend vers $+\infty$ et interpréter le résultat.

D'après la propriété 1 on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Donc avec le même argument de composition que lors de la question (A.1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{e^\lambda}{\lambda} = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^\lambda}{\lambda}} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{e^\lambda} = 0$$

De ce fait puisque

$$A_\lambda = 1 - \frac{\lambda + 1}{e^\lambda} = 1 - \frac{\lambda}{e^\lambda} - \frac{1}{e^\lambda}$$

On a par somme de limites

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{e^\lambda} = 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^\lambda} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda = 1}$$

L'aire du domaine tend donc vers 1.

3. On considère l'algorithme suivant :

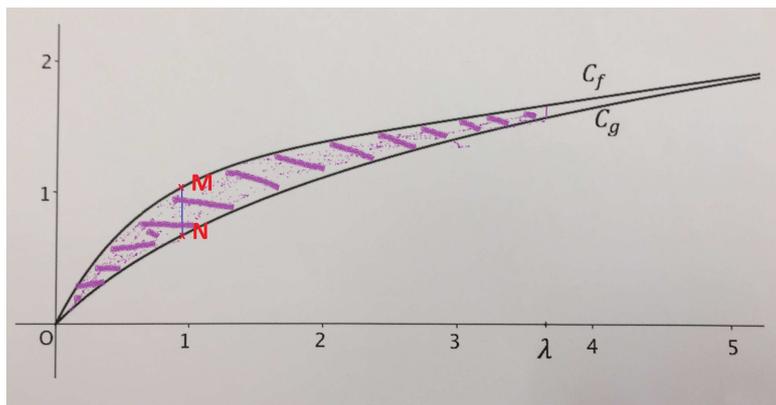
3. a. Quelle valeur affiche cet algorithme si on saisit la valeur $S = 0,8$?

| | | | | | | |
|-------------|---------------|-----------------|-----------------|-----------------|---------|---------|
| λ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| A_λ | $0 < S = 0,8$ | $0.26424 < 0,8$ | $0.59399 < 0,8$ | $0.80085 > 0,8$ | 0.90842 | 0.95957 |

La valeur affichée par cet algorithme si on saisit la valeur $S = 0,8$ est donc $\lambda = 3$.

3. b. Quel est le rôle de cet algorithme?

L'algorithme affiche le plus petit entier naturel λ pour lequel $A_\lambda \geq S$.



**Exercice 2.****3 points****Commun à tous les candidats**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit P le plan d'équation cartésienne : $2x - z - 3 = 0$. On note A le point de coordonnées $(1; a; a^2)$, où a est un nombre réel.

1. Justifier que, quelle que soit la valeur du réel a , le point A n'appartient pas au plan \mathcal{P} .

Le point A appartient au plan P si ses coordonnées vérifient l'équation de P . Pour tout réel a on a :

$$\begin{aligned} A(1; a; a^2) \in \mathcal{P} &\iff 2 - a^2 - 3 = 0 \\ &\iff -1 = a^2 \end{aligned}$$

or a est réel donc a^2 est positif pour toute valeur de a .

Quelle que soit la valeur du réel a , le point A n'appartient pas au plan \mathcal{P} .

2.**2. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite D (de paramètre noté t) passant par le point A et orthogonale au plan \mathcal{P} .**

- Un vecteur normal au plan \mathcal{P} est de coordonnées $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
- Donc la droite D (de paramètre noté t) passant par le point A et orthogonale au plan \mathcal{P} admet \vec{n} comme vecteur directeur.
La droite D passant par le point $A(1; a; a^2)$ et de vecteur directeur $\vec{n} (2; 0; -1)$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que le vecteur \vec{AM} soit colinéaire à \vec{n} . On a alors :

$$D = \left\{ M(x; y; z); \vec{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-a \\ z-a^2 \end{pmatrix} = t \vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Une représentation paramétrique de la droite D est donc :

$$D : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = a \\ z = -t + a^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

2. b. Soit M un point appartenant à la droite D , associé à la valeur t du paramètre dans la représentation paramétrique précédente. Exprimer la distance AM en fonction du réel t .

dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on a avec $\begin{cases} A(1; a; a^2) \\ M(2t+1; a; -t+a^2) \end{cases}$:

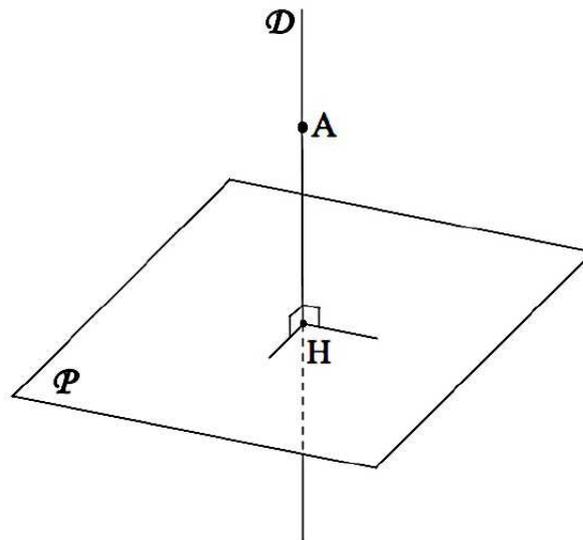
$$\begin{aligned} AM^2 &= (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 + (z_M - z_A)^2 \\ &= (2t)^2 + (a - a)^2 + (-t + a^2 - a^2)^2 \\ &= 4t^2 + t^2 \\ AM^2 &= 5t^2 \end{aligned}$$

Donc puisque t est réel on a :

$$AM = \sqrt{5} \times |t|$$



3. On note H le point d'intersection du plan \mathcal{P} et de la droite D orthogonale à \mathcal{P} et passant par le point A . Le point H est appelé le projeté orthogonal du point A sur le plan \mathcal{P} , et la distance AH est appelée distance du point A au plan \mathcal{P} .



Existe-t-il une valeur de a pour laquelle la distance AH du point A de coordonnées $A(1; a; a^2)$ au plan \mathcal{P} est minimale? Justifier la réponse.

- Puisque la droite D est par définition orthogonale au plan \mathcal{P} , le point H , projeté orthogonal du point A sur le plan \mathcal{P} , est le point d'intersection de D et de \mathcal{P} . Ses coordonnées vérifient :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = a \\ z = -t + a^2 \\ 2x - z - 3 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = a \\ z = -t + a^2 \\ 2(2t + 1) - (-t + a^2) - 3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = a \\ z = -t + a^2 \\ 4t + 2 + t - a^2 - 3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = a \\ z = -t + a^2 \\ t_H = \frac{a^2 + 1}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

- Donc dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on a d'après la question précédente (puisque t_H est évidemment positif) :

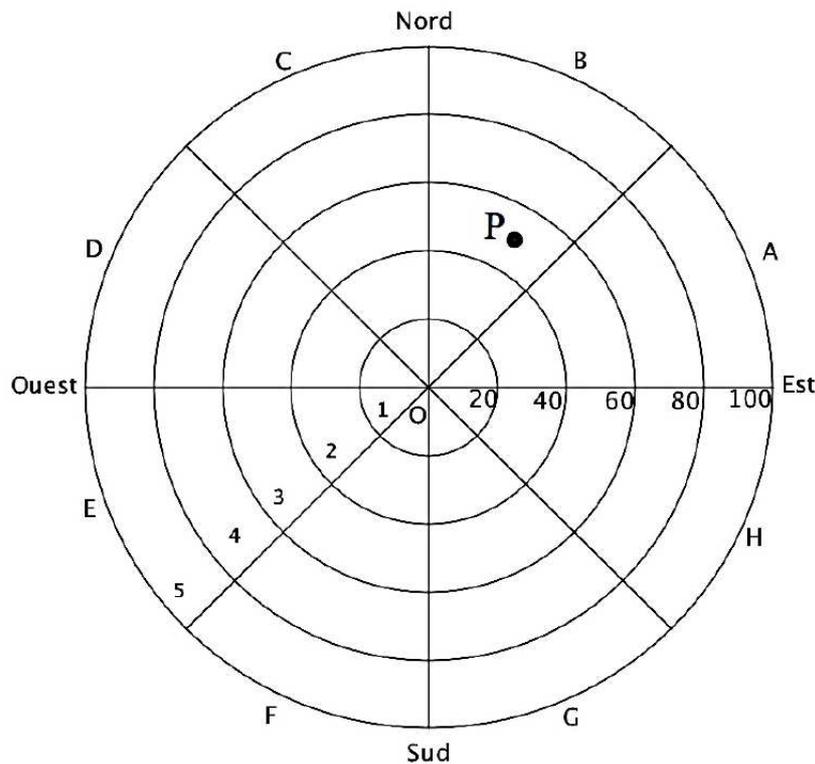
$$AH = \sqrt{5} \times |t_H| = \sqrt{5} \times \left| \frac{a^2 + 1}{5} \right| = \frac{1 + a^2}{\sqrt{5}}$$

- Conclusion : la fonction carré est minimale en 0, donc la distance AH du point A de coordonnées $A(1; a; a^2)$ au plan \mathcal{P} est minimale pour $a = 0$ et vaut

$$AH_{\min} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

**Exercice 3.****5 points****Commun à tous les candidats**

Dans une vaste plaine, un réseau de capteurs permet de détecter la foudre et de produire une image des phénomènes orageux. Ces données servent en particulier aux services météorologiques pour améliorer leurs prévisions et pour permettre des interventions plus rapides sur les lieux, notamment en cas d'incendie. Le but de l'exercice est d'étudier les impacts de foudre détectés par un capteur. L'écran radar, sur lequel les points d'impact de foudre sont observés, a l'allure suivante :

**Partie A**

1. On note z_P l'affixe du point P situé dans le secteur $B3$ sur le graphique précédent. On appelle r le module de z_P et θ son argument dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

Parmi les quatre propositions suivantes, déterminer la seule qui propose un encadrement correct pour r et pour θ (aucune justification n'est demandée) :

| Proposition A | Proposition B | Proposition C | Proposition D |
|---|--|---|--|
| $40 < r < 60$ et $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ | $20 < r < 40$ et $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4}$ | $40 < r < 60$ et $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ | $0 < r < 60$ et $-\frac{\pi}{2} < \theta < -\frac{\pi}{4}$ |

Le point P appartient au secteur $B3$ donc la proposition correcte est la C :

$$\begin{cases} r = |z_P| \in [40; 60] \\ \text{et } \theta \in \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[\end{cases}$$



2. Un impact de foudre est matérialisé sur l'écran en un point d'affixe z . Dans chacun des deux cas suivants, déterminer le secteur auquel ce point appartient :

2. a. $z = 70e^{-i\frac{\pi}{3}}$;

$$z = 70e^{-i\frac{\pi}{3}} \implies \begin{cases} r = |z| = 70 \in [60 ; 80] \\ \text{et } \theta = -\frac{\pi}{3} \in \left] -\frac{\pi}{2} ; -\frac{\pi}{4} \right[\end{cases}$$

Donc le point appartient au secteur G4.

2. b. $z = -45\sqrt{3} + 45i$.

On a :

$$|z| = \sqrt{(-45\sqrt{3})^2 + 45^2} = 90$$

Donc

$$z = 90 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = \underline{90e^{\frac{5\pi}{6}}} \implies \begin{cases} r = |z| = 90 \in [80 ; 100] \\ \text{et } \theta = \frac{5\pi}{6} \in \left] \frac{3\pi}{4} ; \pi \right[\end{cases}$$

Le point appartient donc au secteur D5.

Partie B

On suppose dans cette partie que le capteur affiche un impact au point P d'affixe $50e^{i\frac{\pi}{3}}$; En raison d'imprécisions de mesures, le point d'impact affiché ne donne qu'une indication approximative du point d'impact réel de la foudre. Ainsi, lorsque le capteur affiche le point d'impact P d'affixe $50e^{i\frac{\pi}{3}}$ l'affixe z du point d'impact réel de la foudre admet :

- un module qui peut être modélisé par une variable M suivant une loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart type $\sigma = 5$;
- un argument qui peut être modélisé par une variable T suivant une loi normale d'espérance $\frac{\pi}{3}$ et d'écart type $\frac{\pi}{12}$

On suppose que les variables aléatoires M et T sont indépendantes. Dans la suite les probabilités seront arrondies à 10^{-3} près.

1. Calculer la probabilité $P(M < 0)$ et interpréter le résultat obtenu.

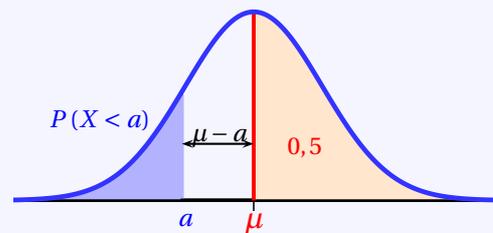
Propriété 2 ($P(X < a)$; $a < \mu$)

Si la variable X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$ alors :

$$P(X < \mu) = 0,5 = P(X > \mu)$$

De plus pour tout réel a avec $a < \mu$:

$$P(X < a) = 0,5 - P(a < X < \mu)$$



Calculatrices

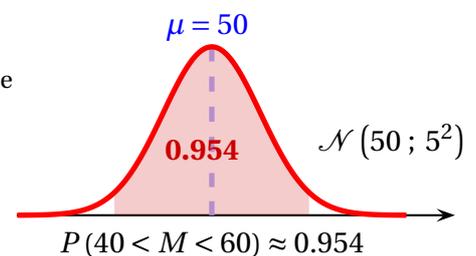
- Sur la TI Voyage 200 : $(0,5 - \text{TStat.normFDR}(0, 50, 50, 5)) \approx 0$
- Sur TI82/83+ : $\text{normalcdf}(0, 50, 50, 5)$ ou (fr.) $\text{normalfrép}(0, 50, 50, 5)$
- Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd \implies NormCD(0, 50, 5, 50)

On retrouve assez logiquement le fait qu'il est impossible que le module du nombre complexe z soit strictement négative .

2. Calculer la probabilité $P(M \in]40 ; 60[)$.

La variable aléatoire M suit une loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type $\sigma = 5$. La calculatrice nous donne à 10^{-3} près :

$$M \sim \mathcal{N}(50 ; 5^2) \implies P(40 < M < 60) \approx \underline{0,954}$$



*Calculatrices*

- Sur la TI Voyage 200 : $TStat.normFDR(40, 60, 50, 5) \approx 0,954499736103642$
- Sur TI82/83+ : $normalcdf(40, 60, 50, 5)$ ou (fr.) $normalfrép(40, 60, 50, 5)$
- Sur Casio 35+ ou 75 : Menu $STAT/DIST/NORM/Ncd \Rightarrow NormCD(40, 60, 5, 50)$

Remarque : on pouvait aussi appliquer le théorème « $1\sigma, 2\sigma, 3\sigma$ » en remarquant que : $P(M \in]40; 60]) = P(\mu - 2\sigma \leq M \leq \mu + 2\sigma)$.

3. On admet que : $P\left(T \in \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right] \right) = 0,819$.

En déduire la probabilité que la foudre ait effectivement frappé le secteur B3 selon cette modélisation.

La probabilité que la foudre ait effectivement frappé le secteur B3 selon cette modélisation est

$$P\left((M \in]40; 60]) \cap \left(T \in \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right] \right)\right)$$

Les événements $(M \in]40; 60])$ et $\left(T \in \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right] \right)$ étant indépendants on a :

$$\begin{aligned} P\left((M \in]40; 60]) \cap \left(T \in \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right] \right)\right) &= P(M \in]40; 60]) \times P\left(T \in \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right] \right) \\ &\approx 0,954 \times 0,819 \\ &\approx \underline{0,781} \end{aligned}$$

La probabilité que la foudre ait effectivement frappé le secteur B3 selon cette modélisation est d'environ 0,781.

**Exercice 4. Obligatoire****5 points****Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

- soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S » ; soit malade (atteint par le virus) ; soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

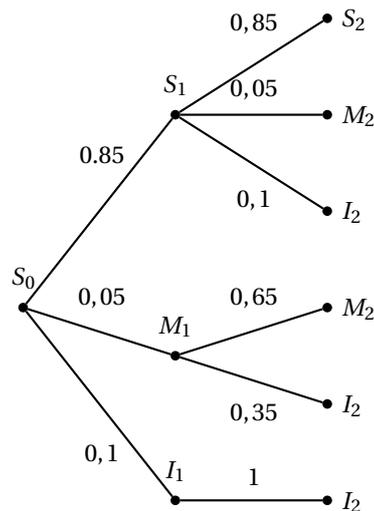
Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus. Pour tout entier naturel n , le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

- Parmi les individus de type S en semaine n , on observe qu'en semaine $n + 1$: 85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés ; Parmi les individus malades en semaine n , on observe qu'en semaine $n + 1$: 65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés.
Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n + 1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les événements suivants : S_n : « l'individu est de type S en semaine n » ; M_n : « l'individu est malade en semaine n » ; I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ». En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes : $P(S_0) = 1$; $P(M_0) = 0$ et $P(I_0) = 0$.

Partie A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous :**2. Montrer que $P(I_2) = 0,2025$.**

Les événements S_1 , M_1 et I_1 forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(I_2) &= P(S_1 \cap I_2) + P(M_1 \cap I_2) + P(I_1 \cap I_2) \\ &= 0,85 \times 0,1 + 0,05 \times 0,35 + 0,1 \times 1 \\ &= \underline{0,2025} \end{aligned}$$

3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, qu'il ait été malade en semaine 1 ?

La probabilité cherché est $P_{I_2}(M_1)$, or on a :

$$\begin{aligned} P_{I_2}(M_1) &= \frac{P(I_2 \cap M_1)}{P(I_2)} \\ &= \frac{0,05 \times 0,35}{0,2025} \\ &= \frac{7}{81} \approx \underline{0,086} \end{aligned}$$

Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, la probabilité, arrondie au millième, qu'il ait été malade en semaine 1 est de 0,086.

**Partie B**

On étudie à long terme l'évolution de la maladie. Pour tout entier naturel n , on a : $u_n = P(S_n)$, $v_n = P(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des événements S_n , M_n et I_n .

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n + v_n + w_n = 1$.

Chaque semaine, l'individu est soit de type S, soit malade ou soit immunisé. Donc la somme des probabilités des événements (disjoints) correspondants est 1 soit pour n entier :

$$P(S_n) + P(M_n) + P(I_n) = 1$$

Et donc on a bien pour tout entier n ,

$$u_n + v_n + w_n = 1$$

2. On admet que la suite (v_n) est définie par $v_0 = 0,65v_n + 0,05u_n$. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .

| | A | B | C | D |
|-----|-----|--------|--------|--------|
| 1 | n | u_n | v_n | w_n |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 0,8500 | 0,0500 | 0,1000 |
| 4 | 2 | 0,7225 | 0,0750 | 0,2025 |
| 5 | 3 | 0,6141 | 0,0849 | 0,3010 |
| 6 | 4 | 0,5220 | 0,0859 | 0,3921 |
| 7 | 5 | 0,4437 | 0,0819 | 0,4744 |
| 8 | 6 | 0,3771 | 0,0754 | 0,5474 |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| 20 | 18 | 0,0536 | 0,0133 | 0,9330 |
| 21 | 19 | 0,0456 | 0,0113 | 0,9431 |
| 22 | 20 | 0,0388 | 0,0096 | 0,9516 |

Pour répondre aux questions a. et b. suivantes, on utilisera la feuille de calcul reproduite ci-dessus.

2. a. Quelle formule, saisie dans la cellule C3, permet par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n) ?

La formule, saisie dans la cellule C3, qui permet par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n) est :

$$= 0,65 * C2 + 0,05 * B2$$

2. b. On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'un certain rang N , appelé le « pic épidémique » : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande. Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.

On peut lire parmi les valeurs proposées, la valeur maximale de v_n , puisqu'on admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'un certain rang N on a :

| | A | B | C | D |
|---|---------|--------|--------|--------|
| 6 | $N = 4$ | 0,5220 | 0,0859 | 0,3921 |

La valeur du pic épidémique prévu par ce modèle est donc $N = 4$.

3.**3. a. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = 0,85u_n$. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .**

Pour tout entier n , $u_{n+1} = P(S_{n+1})$. Or parmi les individus de type S en semaine n , on observe qu'en semaine $n + 1$: 85 % restent de type S, et aucun des individus malades ou immunisés ne peut devenir de type S. De ce fait pour n entier on a :

$$P(S_{n+1}) = P(S_{n+1} \cap S_n) = 0,85 \times P(S_n)$$

Et donc pour tout entier n :

$$u_{n+1} = 0,85u_n$$



La suite (u_n) est donc géométrique, de premier terme $u_0 = P(S_0) = 1$, et de raison 0,85.
Son terme général s'exprime donc sous la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_n = 1 \times 0,85^n = \underline{0,85^n}$$

3. b. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n , $v_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$.

Notons pour tout entier naturel $n \geq 0$ le postulat

$$(P_n) : v_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$$

- **Initialisation**

Pour $n = 0$, le postulat (P_0) est vrai puisque :

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ \text{et } \frac{1}{4}(0,85^0 - 0,65^0) = 0 \end{cases}$$

- **Hérédité**

Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$. Par définition de la suite (v_n) on a :

$$v_{n+1} = 0,65 \times v_n + 0,05 \times u_n$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence et le résultat de la question (B1) :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 0,65 \times \left(\underbrace{\frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)}_{v_n} \right) + 0,05 \times 0,85^n \\ &= \frac{1}{4} \times 0,65 \times 0,85^n - \frac{1}{4} \times 0,65^{n+1} + 0,05 \times 0,85^n \\ &= \left(\frac{1}{4} \times 0,65 + 0,05 \right) \times 0,85^n - \frac{1}{4} \times 0,65^{n+1} \\ &= \frac{1}{4} \times \left(\underbrace{0,65 + 4 \times 0,05}_{0,85} \right) \times 0,85^n - \frac{1}{4} \times 0,65^{n+1} \\ &= \frac{1}{4} \times 0,85^{n+1} - \frac{1}{4} \times 0,65^{n+1} \end{aligned}$$

On a alors montré que $v_{n+1} = \frac{1}{4}(0,85^{n+1} - 0,65^{n+1})$ et donc que (P_{n+1}) est vrai.

- **Conclusion**

On a montré que (P_0) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

$$\boxed{v_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)}$$



4. Calculer les limites de chacune des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) . Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?

Théorème 1

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

- Pour (u_n) .

Ici $-1 < q = 0,85 < 1$ donc d'après le théorème 1 on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,85)^n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Pour (v_n) .

Ici $-1 < q = 0,85 < 1$ et $-1 < q = 0,65 < 1$ d'après le théorème 1 on a par somme de limites

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,85)^n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,65)^n = 0 \end{array} \right. \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} (0,85^n - 0,65^n) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

Pour (w_n) .

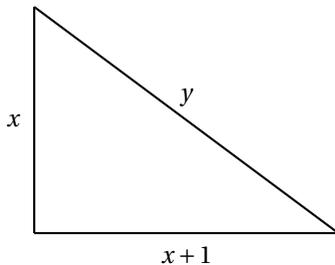
La suite (w_n) s'exprime d'après la question (B1.), pour tout entier n par $w_n = 1 - u_n - v_n$. Donc par somme et différences de limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \end{array} \right. \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - u_n - v_n = 1 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1$$

- Interprétation : Cela signifie donc que sur le long terme, selon ce modèle, tous les individus seront immunisés.

**Exercice 4. Spécialité****5 points****Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

On appelle « triangle rectangle presque isocèle », en abrégé TRPI, un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs x et $x + 1$, et dont l'hypoténuse a pour longueur y , où x et y sont des entiers naturels. Ainsi, un TRPI est un triangle rectangle dont les longueurs des côtés de l'angle droit sont deux nombres entiers consécutifs et dont la longueur de l'hypoténuse est un nombre entier.



Si le triangle de côtés x , $x + 1$ et y , où y est la longueur de l'hypoténuse, est un TRPI, on dira que le couple $(x ; y)$ définit un TRPI.

Partie A**1. Démontrer que le couple d'entiers naturels $(x ; y)$ définit un TRPI si, et seulement si, on a : $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$.**

- Si le couple d'entiers naturels $(x ; y)$ définit un TRPI alors d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle associé on a :

$$x^2 + (x + 1)^2 = y^2 \iff x^2 + x^2 + 2x + 1 = y^2 \iff \underline{y^2 = 2x^2 + 2x + 1}$$

- Réciproquement, si $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$ alors on a en reprenant le calcul précédent :

$$y^2 = 2x^2 + 2x + 1 \iff x^2 + (x + 1)^2 = y^2$$

De ce fait le triangle associé, de côté x , $(x + 1)$ et y est tel que la somme des carrés de deux côtés est égale au carré du troisième. Donc d'après le réciproque de Pythagore, ce triangle est rectangle et ce troisième côté est l'hypoténuse.

2. Montrer que le TRPI ayant les plus petits côtés non nuls est défini par le couple $(3 ; 5)$.

- Si $x = 1$, alors d'après la question (1.) on a $y^2 = 2 \times 1^2 + 2 \times 1 + 1 = 5$. Puisque y est positif, cela implique que $y = \sqrt{5}$ qui n'est pas entier. Donc $x = 1$ ne convient pas.
- Si $x = 2$, alors d'après la question (1.) on a $y^2 = 2 \times 2^2 + 2 \times 2 + 1 = 13$. Puisque y est positif, cela implique que $y = \sqrt{13}$ qui n'est pas entier. Donc $x = 2$ ne convient pas.
- Si $x = 3$, alors d'après la question (1.) on a $y^2 = 2 \times 3^2 + 2 \times 3 + 1 = 25$. Puisque y est positif, cela implique que $y = 5$ qui est entier. Donc $x = 3$ convient, et le TRPI ayant les plus petits côtés non nuls est défini par le couple $(3 ; 5)$.

3.**3. a. Soit n un entier naturel. Montrer que si n^2 est impair alors n est impair.**

Soit n un entier naturel. Si n est pair alors il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$. Dans ce cas

$$n^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2)$$

Donc n^2 est pair (puisque $2k^2$ est entier). On vient de montrer que :

« Si n est pair, alors n^2 est pair. »

Et la propriété contraposée est aussi vraie :

« Si n^2 est impair, alors n est impair. »

3. b. Montrer que dans un couple d'entiers $(x ; y)$ définissant un TRPI, le nombre y est nécessairement impair.

- Soit un couple d'entiers $(x ; y)$ définissant un TRPI, d'après la question (1.) on a :

$$y^2 = 2x^2 + 2x + 1 \iff y^2 = 2 \times \underbrace{(x^2 + x)}_{k \in \mathbb{N}} + 1$$

Donc y^2 est de la forme $2k + 1$ avec k entier, il est donc impair.



- On vient de montrer dans la question (3a.) que puisque y^2 est impair, cela implique que y est aussi impair.

4. Montrer que si le couple d'entiers naturels $(x; y)$ définit un TRPI, alors x et y sont premiers entre eux.

Soit un couple d'entiers $(x; y)$ définissant un TRPI, d'après la question (1.) on a : $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$. Pour montrer que x et y sont premiers entre eux, on va essayer d'appliquer le théorème de Bézout :

Théorème 2 (Bézout, 1730-1883)

Deux entiers naturels a et b sont premiers entre eux, si et seulement si, il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$.

Soit :

$$\text{PGCD}(a; b) = 1 \iff \exists (u; v) \in \mathbb{Z}^2; au + bv = 1$$



Remarque : C'est le groupe Bourbaki qui donne vers 1948 le nom de Bézout à ce théorème qui en fait est énoncé et démontré par le mathématicien français Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638) dans ses « *Problèmes plaisans et délectables* » publié en 1624. Bézout démontre lui une généralisation de ce théorème aux polynômes en 1764 dans un mémoire présenté à l'académie des sciences.

Soit un couple d'entiers $(x; y)$ définissant un TRPI, alors :

$$\begin{aligned} y^2 = 2x^2 + 2x + 1 &\iff y^2 = x \times (2x + 2) + 1 \\ &\iff -x \times (2x + 2) + y^2 = 1 \\ &\iff x \times \underbrace{(-2x - 2)}_u + y \times y = 1 \\ &\iff x \times u + y \times v = 1 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u = -2x - 2 \in \mathbb{Z} \\ v = y \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

D'après le théorème de Bézout, les entiers x et y sont premiers entre eux.

Partie B

On note A la matrice carrée : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, et B la matrice colonne : $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Soient x et y deux entiers naturels; on définit les entiers naturels x' et y' par la relation : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$.

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et y .

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B &\iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2y + 1 \\ 4x + 3y + 2 \end{pmatrix} \\ &\iff \boxed{\begin{cases} x' = 3x + 2y + 1 \\ y' = 4x + 3y + 2 \end{cases}} \end{aligned}$$



2.

2. a. Montrer que : $y'^2 - 2x'(x' + 1) = y^2 - 2x(x + 1)$.En appliquant les relations de la question précédente (B1.) on obtient pour x et y entiers naturels :

$$\begin{aligned}
y'^2 - 2x'(x' + 1) &= \underbrace{(4x + 3y + 2)^2}_{y'} - 2 \underbrace{(3x + 2y + 1)}_{x'} \times \underbrace{(3x + 2y + 1 + 1)}_{x'} \\
&= (4x + 3y + 2) \times (4x + 3y + 2) - (6x + 4y + 2) \times (3x + 2y + 2) \\
&= 16x^2 + 12xy + 8x + 12xy + 9y^2 + 6y + 8x + 6y + 4 - (6x + 4y + 2) \times (3x + 2y + 2) \\
&= 16x^2 + 9y^2 + 4 + 24xy + 16x + 12y - (6x + 4y + 2) \times (3x + 2y + 2) \\
&= 16x^2 + 9y^2 + 4 + 24xy + 16x + 12y - (18x^2 + 12xy + 12x + 12xy + 8y^2 + 8y + 6x + 4y + 4) \\
&= 16x^2 + 9y^2 + 4 + 24xy + 16x + 12y - 18x^2 - 24xy - 18x - 8y^2 - 12y - 4 \\
&= -2x^2 + y^2 - 2x \\
&= \underline{y^2 - 2x(x + 1)}
\end{aligned}$$

2. b. En déduire que si le couple $(x ; y)$ définit un TRPI, alors le couple $(x' ; y')$ définit également un TRPI.Si le couple $(x ; y)$ définit un TRPI, alors $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$.

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
y^2 = 2x^2 + 2x + 1 &\iff y^2 - 2x^2 - 2x - 1 = 0 \\
&\iff y^2 - 2x(x + 1) = 0 \\
&\iff y'^2 - 2x'(x' + 1) = 0 \quad \text{d'après la question (B2a.)} \\
&\iff y'^2 = 2x'^2 + 2x' + 1
\end{aligned}$$

Et donc le couple $(x' ; y')$ définit également un TRPI d'après la question (A1.).**3. On considère les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers naturels, définies par $x_0 = 3$, $y_0 = 5$ et pour tout entier naturel n :**

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + B. \text{ Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel } n, \text{ le couple } (x_n ; y_n) \text{ définit un TRPI.}$$

Notons pour tout entier naturel $n \geq 0$ le postulat

$$(P_n) : (x_n ; y_n) \text{ définit un TRPI}$$

• InitialisationPour $n = 0$, le postulat (P_0) est vrai puisque : le couple $(x_0 = 3 ; y_0 = 5)$ définit un TRPI d'après la question (A2.).**• Hérité**Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n + 1$. D'après la question (B1.) on a :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + B \iff \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 2y_n + 1 \\ y_{n+1} = 4x_n + 3y_n + 2 \end{cases}$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que : (P_n) soit vérifié et donc que

$$(x_n ; y_n) \text{ définit un TRPI}$$

D'après la question précédente (B2b), puisque $(x_n ; y_n)$ définit un TRPI, alors $(x_{n+1} ; y_{n+1})$ définit également un TRPI.On a alors montré que $(x_{n+1} ; y_{n+1})$ définit un TRPI et donc que (P_{n+1}) est vrai.**• Conclusion**On a montré que (P_0) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

$$\boxed{(x_n ; y_n) \text{ définit un TRPI}}$$



4. Déterminer, par la méthode de votre choix que vous préciserez, un TRPI dont les longueurs des côtés sont supérieures à 2017.

- On part du couple $(x_0 = 3 ; y_0 = 5)$ qui définit un TRPI.
- Alors on a par produit matriciel (on pouvait aussi utiliser les expressions de la question (B1.)) :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 29 \end{pmatrix}$$

- Puis de même :

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 20 \\ 29 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 119 \\ 169 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 119 \\ 169 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 985 \end{pmatrix}$$

- On obtient finalement le premier couple qui répond à la question posée :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4059 \\ 5741 \end{pmatrix}}$$

Remarque : Les couples suivants sont

| | | |
|-------|-------|--------|
| n | 5 | 6 |
| x_n | 23660 | 137903 |
| y_n | 33461 | 195025 |

☞ **Fin du devoir** ☞