

Exercice I

6 points

Commun à tous les candidats

La société Fibration fournit des abonnements Internet et des abonnements de téléphone mobile. Un client de la société Fibration souscrit soit un abonnement Internet, soit un abonnement de téléphone mobile, il ne cumule pas les deux. En cas de difficulté, la société Fibration propose à ses clients une ligne d'assistance téléphonique : le client doit d'abord signaler s'il est client Internet ou s'il est client mobile puis son appel est mis en attente de réponse par un opérateur.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Si nécessaire, les résultats seront arrondis à 10^{-3} .

Partie A - Durée d'attente

1. (a) La durée d'attente en minutes est modélisée par la variable aléatoire D_1 qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,6.

$$\text{L'espérance d'une loi exponentielle est } E\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{0,6} = \frac{10}{6} = \boxed{\frac{5}{3} \approx 1,67}.$$

La durée moyenne d'attente est d'environ 1,67 min.

(b) $P(D_1 < x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-\lambda e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$ donc $P(D_1 > 5) = 1 - e^{-5\lambda} = 1 - e^{-3} \approx 0,950$ à 10^{-3} .

La probabilité que la durée d'attente d'un client Internet choisi au hasard soit inférieure à 5 minutes est d'environ 0,950.

2. Dans cette question, on s'intéresse à la durée d'attente d'un client mobile lorsqu'il contacte l'assistance téléphonique avant de joindre un opérateur. On modélise cette durée d'attente en minutes par la variable aléatoire D_2 qui suit une loi exponentielle de paramètre λ , λ étant un réel strictement positif.

(a) $P(D_2 \leq 4) = 1 - e^{-4\lambda}$ (mêmes calculs que précédemment).

On cherche donc λ tel que $1 - e^{-4\lambda} = 0,798$.

On en déduit : $e^{-4\lambda} = 1 - 0,798 = 0,202$ donc $-4\lambda = \ln(0,202)$ d'où $\lambda = -\frac{\ln(0,202)}{4} \approx 0,4$ à 10^{-3} :

$$\boxed{\lambda \approx 0,4}$$

(b) On prend $\lambda = 0,4$.

$$P(D_2 > x) = e^{-\lambda x} \text{ donc } P(D_2 > 5) = e^{-5\lambda} = e^{-2} \approx 0,135 \quad \boxed{\approx 13,5\%}.$$

Environ 13,5 % des clients mobile choisis au hasard attendent plus de 5 minutes, donc plus de 10 %. L'affirmation est donc **fausse**.

Partie B - Obtention d'un opérateur

Si la durée d'attente avant l'obtention d'un opérateur dépasse 5 minutes, l'appel prend automatiquement fin. Sinon, l'appelant obtient un opérateur.

On choisit au hasard un client qui appelle la ligne d'assistance.

On admet que la probabilité que l'appel émane d'un client Internet est 0,7.

De plus, d'après la partie A, on prend les données suivantes :

— Si l'appel provient d'un client Internet, alors la probabilité d'obtenir un opérateur est égale à 0,95.

— Si l'appel provient d'un client mobile, alors la probabilité d'obtenir un opérateur est égale à 0,87.

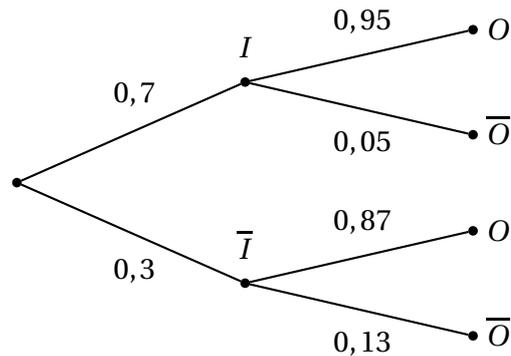
Notons :

- I l'évènement : « Le client a souscrit un abonnement Internet ».
- O l'évènement : « Le client obtient un opérateur ».

Traduction des données :

- $p(I) = 0,7$
- $p_I(O) = 0,95$
- $p_{\bar{I}}(O) = 0,87$

1. La situation peut se décrire par l'arbre pondéré suivant :



$O = (O \cap I) \cup (O \cap \bar{I})$ (réunion d'évènements incompatibles) donc :

$p(O) = p(O \cap I) + p(O \cap \bar{I}) = p_I(O) \times p(I) + p_{\bar{I}}(O) \times p(\bar{I})$ (formule des probabilités totales).

$$p(O) = 0,95 \times 0,7 + 0,87 \times 0,3 = 0,665 + 0,261 = \boxed{0,926}.$$

La probabilité que le client joigne un opérateur est 0,926.

$$2. \bullet p_{\bar{O}}(I) = \frac{p(I \cap \bar{O})}{p(\bar{O})} = \frac{0,05 \times 0,7}{1 - 0,926} = \frac{0,035}{0,074} = \boxed{\frac{35}{74}}.$$

$$\bullet p_{\bar{O}}(\bar{I}) = \frac{p(\bar{I} \cap \bar{O})}{p(\bar{O})} = \frac{0,13 \times 0,3}{1 - 0,926} = \frac{0,039}{0,074} = \boxed{\frac{39}{74}}.$$

$$\boxed{p_{\bar{O}}(\bar{I}) > p_{\bar{O}}(I)}.$$

Si un client se plaint que son appel a pris fin après 5 minutes d'attente sans avoir obtenu d'opérateur, il est plus probable que ce soit un client mobile.

Partie C - Enquête de satisfaction

La société annonce un taux de satisfaction de 85 % pour ses clients ayant appelé et obtenu un opérateur.

Une association de consommateurs souhaite vérifier ce taux et interroge 1 303 personnes.

Parmi celles-ci, 1 150 se disent satisfaites.

D'après la société, la proportion p de clients satisfaits est $p = 0,85$.

On interroge 1 303 personnes, donc la taille de l'échantillon est $n = 1303$.

$$\text{On a : } \begin{cases} n = 1303 \geq 30 \\ np = 1303 \times 0,85 = 1107,55 \geq 5 \\ n(1-p) = 1303 \times 0,15 = 195,45 \geq 5 \end{cases}$$

Les conditions sont vérifiées pour que l'on puisse calculer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

$$I_{0,95} = \left[p - 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \approx [0,83 ; 0,87].$$

La fréquence observée de clients satisfaits sur l'échantillon considéré est $f = \frac{1150}{1303} \approx 0,88 \notin I_{0,95}$.

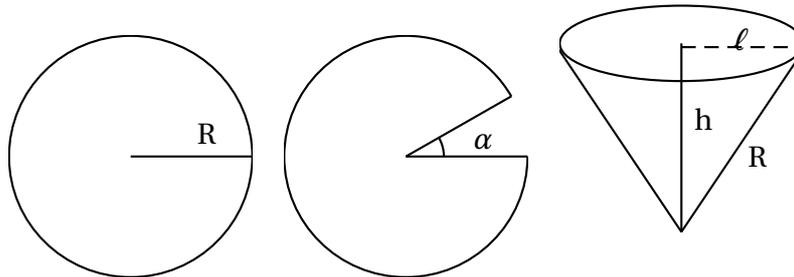
La fréquence f n'est pas dans l'intervalle de fluctuation asymptotique. On peut remettre en question l'affirmation de la société.

Cependant, la fréquence de clients satisfaits est supérieure à la proportion annoncée!

Exercice II

5 points

Commun à tous les candidats



Dans un disque en carton de rayon R , on découpe un secteur angulaire correspondant à un angle de mesure α radians. On superpose les bords afin de créer un cône de révolution. On souhaite choisir l'angle α pour obtenir un cône de volume maximal.

On appelle ℓ le rayon de la base circulaire de ce cône et h sa hauteur.

On rappelle que :

- le volume d'un cône de révolution de base un disque d'aire \mathcal{A} et de hauteur h est $\frac{1}{3} \mathcal{A} h$.
- la longueur d'un arc de cercle de rayon r et d'angle θ , exprimé en radians, est $r\theta$.

1. On choisit $R = 20$ cm.

- (a) D'après le théorème de Pythagore, on a $\ell^2 = R^2 - h^2 = 20^2 - h^2 = 400 - h^2$.
L'aire de base vaut $\mathcal{A} = \pi \ell^2 = \pi (400 - h^2)$.

Le volume du cône est alors $V(h) = \frac{1}{3} \pi (400 - h^2) h$.

- (b) La fonction V est définie sur $[0 ; 20]$ et dérivable.

$V(h) = \frac{\pi}{3} \times (400h - h^3)$ donc $V'(h) = \frac{\pi}{3} \times (400 - 3h^2)$.

$V'(h)$ a pour racines $h_1 = -\sqrt{\frac{400}{3}} = -\frac{20}{\sqrt{3}} = -\frac{20\sqrt{3}}{3} \notin [0 ; 20]$ et $h_2 = \frac{20\sqrt{3}}{3} \in [0 ; 20]$.

$V'(h)$ est un polynôme du second degré qui est du signe du coefficient de h^2 à l'extérieur des racines, donc négatif.

La fonction est donc croissante sur $\left[0 ; \frac{20\sqrt{3}}{3} \right]$ puis décroissante sur $\left[\frac{20\sqrt{3}}{3} ; 20 \right]$.

Tableau de variation :

x	0	$\frac{20\sqrt{3}}{3}$	20
$V'(h)$	+	0	-
$V(h)$	0	$V\left(\frac{20\sqrt{3}}{3}\right)$	0

Le volume maximum est $V\left(\frac{20\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \left(400 - \frac{400}{3}\right) \times \frac{20\sqrt{3}}{3} = \frac{16000\pi\sqrt{3}}{27} \approx 3224 \text{ cm}^3$.

(c) On a vu précédemment que le rayon du cercle de base était $\ell = \sqrt{400 - h^2}$.

Le volume est maximum pour $h = h_2 = \frac{20\sqrt{3}}{3}$; la valeur correspondante de ℓ est

$$\ell_2 = \sqrt{400 - h_2^2} = \sqrt{400 - \frac{400}{3}} = \sqrt{\frac{800}{3}} = \sqrt{\frac{2 \times 400}{3}} = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{6}}{3}$$

Le périmètre du cercle de base est alors $p_2 = 2\pi\ell_2 = \frac{40\pi\sqrt{6}}{3}$.

La longueur du cercle de base est aussi la longueur de l'arc de cercle du carton restant après avoir ôté le secteur circulaire d'angle au centre α :

$$p_2 = R(2\pi - \alpha).$$

Par conséquent : $20(2\pi - \alpha) = 40\pi \frac{\sqrt{6}}{3}$ d'où $2\pi - \alpha = 2\pi \frac{\sqrt{6}}{3}$ qui donne

$$\alpha = 2\pi - 2\pi \frac{\sqrt{6}}{3} = 2\pi \frac{3 - \sqrt{6}}{3} : \alpha = 2\pi \left(\frac{3 - \sqrt{6}}{3}\right) \text{ (en radians)}$$

En degrés : $\alpha = 2\pi \left(\frac{3 - \sqrt{6}}{3}\right) \times \frac{180}{\pi} = 120(3 - \sqrt{6}) \approx 66,06^\circ$

2. On reprend les calculs précédents avec R quelconque.

On a (avec les mêmes notations) :

- $V(h) = \frac{\pi}{3} (R^2 h - h^3)$

- $V'(h) = \frac{\pi}{3} (R^2 - 3h^2)$

- $h_1 = -\frac{R\sqrt{3}}{3} \notin [0; R]$ et $h_2 = \frac{R\sqrt{3}}{3} \in [0; R]$

- Les variations sont les mêmes que dans le cas particulier $R = 20$.

- Le maximum est atteint pour $h_2 = \frac{R\sqrt{3}}{3}$

- Le rayon correspondant du cercle de base est $\ell_2 = \sqrt{R^2 - h_2^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{3}} = \sqrt{\frac{2R^2}{3}} = R \frac{\sqrt{6}}{3}$

- Le périmètre du cercle de base vaut alors $p_2 = 2\pi\ell_2 = \frac{2\pi R\sqrt{6}}{3}$.

- On a alors : $R(2\pi - \alpha) = 2\pi R \frac{\sqrt{6}}{3}$ d'où $\alpha = 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \boxed{2\pi \left(\frac{3 - \sqrt{6}}{3}\right)}$ qui est la même valeur que précédemment.

La valeur de α **ne dépend pas** de R .

Exercice III

4 points

Commun à tous les candidats

Les interactions électriques conduisent à modéliser la molécule de méthane CH_4 de la façon suivante :

- Les noyaux d'atomes d'hydrogène occupent les positions des quatre sommets d'un tétraèdre régulier.
- Le noyau de carbone au centre de la molécule est à égale distance des quatre atomes d'hydrogène.

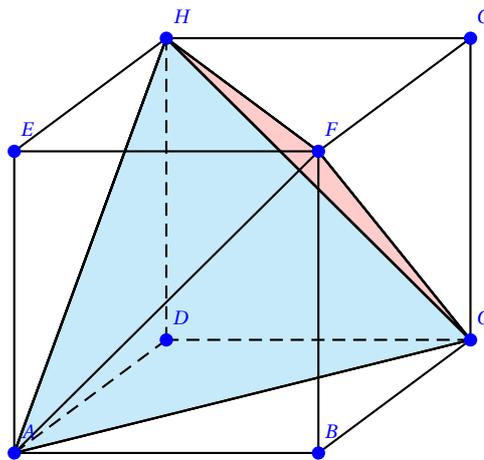
L'objectif est de déterminer une mesure de l'angle entre deux liaisons carbone- hydrogène.

Un tétraèdre régulier est un polyèdre dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux.

- Puisque les quatre atomes d'hydrogène sont les sommets d'un tétraèdre régulier, les arêtes de ce tétraèdre ont la même longueur. C'est le cas si l'on positionne les atomes sur les sommets du cube de telle sorte que les arêtes du tétraèdre soient des diagonales des faces carrées du cube.

On place les quatre atomes sur les sommets A, C (ce qui fixe les longueurs des arêtes) puis en F et H.

Représentons la molécule dans le cube :



Dans la suite de l'exercice, on pourra travailler dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

- Le centre du cube Ω est à égale distance des sommets A, C, F et H, donc l'atome de carbone est en Ω .
- Dans le repère considéré, A, Ω et C ont pour coordonnées :

$$A(0; 0; 0); \Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \text{ et } C(1; 1; 0).$$

$$\overrightarrow{\Omega A} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \overrightarrow{\Omega C} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\vec{\Omega A} \cdot \vec{\Omega C} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}.$$

$$\Omega A = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Omega C = \Omega A = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (triangle isocèle).}$$

$$\text{On sait que } \vec{\Omega A} \cdot \vec{\Omega C} = \Omega A \times \Omega C \times \cos \widehat{A\Omega C} \text{ donc } \cos \widehat{A\Omega C} = \frac{\vec{\Omega A} \cdot \vec{\Omega C}}{\Omega A \times \Omega C} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

$$\cos \widehat{A\Omega C} = \frac{1}{3} \text{ donc } \widehat{A\Omega C} = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx \boxed{109,47^\circ} \text{ soit environ } 109,5^\circ.$$

Exercice IV

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On s'intéresse à la chute d'une goutte d'eau qui se détache d'un nuage sans vitesse initiale. Un modèle très simplifié permet d'établir que la vitesse instantanée verticale, exprimée en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, de chute de la goutte en fonction de la durée de chute t est donnée par la fonction v définie ainsi :

Pour tout réel positif ou nul t , $v(t) = 9,81 \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$; la constante m est la masse de la goutte en milligramme et la constante k est un coefficient strictement positif lié au frottement de l'air.

On rappelle que la vitesse instantanée est la dérivée de la position.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A - Cas général

1. La fonction vitesse est dérivable : $v'(t) = 9,81 \frac{m}{k} \times \left(-\frac{-k}{m}\right) e^{-\frac{k}{m}t} = 9,81 e^{-\frac{k}{m}t} > 0$ (en utilisant la formule $(e^u)' = u'e^u$ si u est dérivable sur l'intervalle considéré).

La vitesse est donc croissante sur $[0; +\infty[$.

2. Puisque la vitesse de la goutte est croissante, elle **augmente** donc n'augmente pas au cours de sa chute.

3. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{k}{m}t\right) = -\infty$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{k}{m}t} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$.

Par conséquent : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) = 1$ d'où $\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 9,81 \frac{m}{k}}$.

Notons $V = 9,81 \frac{m}{k}$ cette vitesse limite.

4. On calcule $v(5V) = 9,81 \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m} \times 5 \frac{m}{k}}\right) = 9,81 \frac{m}{k} (1 - e^{-5})$.

$\frac{v}{V} = \frac{9,81 \frac{m}{k} (1 - e^{-5})}{9,81 \frac{m}{k}} = 1 - e^{-5} \approx 0,993 \approx \boxed{99,3\%}$ donc, cette vitesse dépasse 99 % de la vitesse limite.

L'affirmation était **correcte**.

Partie B

Dans cette partie, on prend $m = 6$ et $k = 3,9$.

À un instant donné, la vitesse instantanée de cette goutte est 15 m.s^{-1} .

1. $v(t) = 9,81 \times \frac{6}{3,9} \left(1 - e^{-\frac{3,9}{6}t}\right)$. On résout :

$$9,81 \times \frac{6}{3,9} \left(1 - e^{-\frac{3,9}{6}t}\right) = 15$$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{3,9}{6}t} = \frac{15}{9,81} \times \frac{3,9}{6}$$

$$e^{-\frac{3,9}{6}t} = 1 - \frac{15}{9,81} \times \frac{3,9}{6} = 1 - \frac{325}{327} = \frac{2}{327}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3,9}{6}t = \ln\left(\frac{2}{327}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{6}{3,9} \ln\left(\frac{2}{327}\right) \approx 7,2.$$

La vitesse atteint 15 m.s^{-1} au bout de $T = 7,2 \text{ s}$ environ.

2. La valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a; b]$ est $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

La vitesse moyenne demandée est donc :

$$V = \frac{1}{T-0} \int_0^T f(t) dt.$$

$$V = \frac{1}{5} \left[t + \frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m}t} \right]_0^T.$$

La vitesse moyenne est donc :

$$\bar{v} = \frac{1}{7,8} \left[9,81 \times \frac{6}{3,9} \left(7,8 + \frac{6}{3,9} e^{-\frac{3,9}{6} \times 7,8} \right) - 9,81 \times \frac{6}{3,9} \times \frac{6}{3,9} \right] \approx 12,1.$$

La vitesse moyenne d'une goutte entre l'instant où elle quitte le nuage et l'instant où elle atteint 15 m.s^{-1} est d'environ $12,1 \text{ m.s}^{-1}$

Exercice IV

6 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes.

Une personne a mis au point le procédé de cryptage suivant :

— À chaque lettre de l'alphabet, on associe un entier n comme indiqué ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

— On choisit deux entiers a et b compris entre 0 et 25.

— Tout nombre entier n compris entre 0 et 25 est codé par le reste de la division euclidienne de $an + b$ par 26.

Le tableau suivant donne les fréquences f en pourcentage des lettres utilisées dans un texte écrit en français.

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Fréquence	9,42	1,02	2,64	3,38	15,87	0,94	1,04	0,77	8,41	0,89	0,00	5,33	3,23
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Fréquence	7,14	5,13	2,86	1,06	6,46	7,90	7,26	6,24	2,15	0,00	0,30	0,24	0,32

Partie A

Un texte écrit en français et suffisamment long a été codé selon ce procédé. L'analyse fréquentielle du texte codé a montré qu'il contient 15,9 % de O et 9,4 % de E.

On souhaite déterminer les nombres a et b qui ont permis le codage.

- D'après le tableau, E est codé par O et A est codé par E.
- La lettre E (4) a été codée par O(14) donc $4a + b \equiv 14 [26]$.
• De même, A(0) est codé par E(4) donc $a \times 0 + b \equiv 4 [26]$

On a donc le système :

$$\begin{cases} 4a + b \equiv 14 [26] \\ b \equiv 4 [26] \end{cases}$$

- Ce système donne $\begin{cases} 4a \equiv 10 [26] \\ b \equiv 4 [26] \end{cases}$.

On cherche toutes les valeurs de a telle que $4a \equiv 10 [26]$:

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4a	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
4a [26]	0	4	8	12	16	20	24	2	6	10	14	18	22
a	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
4a	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100
4a [26]	0	4	8	12	16	20	24	2	6	10	14	18	22

On trouve deux valeurs possibles pour a : $a = 9$ ou $a = 22$.

Les deux couples possibles sont $(9; 4)$ et $(22; 4)$.

Partie B

- On choisit $a = 22$ et $b = 4$.

- Pour K, on a $n = 10$. Alors $an + b = 22 \times 10 + 4 = 224 \equiv 16 [26]$ donc K est codé par Q.
Pour X, on a $n = 23$. Alors $an + b = 22 \times 23 + 4 = 510 \equiv 16 [26]$ donc X est aussi codé par Q.
- Ce codage n'est **pas envisageable**, car deux lettres différentes sont codées par la même lettre.

- On choisit $a = 9$ et $b = 4$.

- $m \equiv 9n + 4 [26] \Rightarrow 3m \equiv 27n + 12 [26] \Rightarrow 3m \equiv n + 12 [26] \Rightarrow 3m \equiv n - 14 [26] \Rightarrow 3m + 14 \equiv n [26]$.
• Réciproquement :
 $n = 3m + 14 [26] \Rightarrow 9n \equiv 27m + 126 [26] \Rightarrow 9n \equiv m + 22 [26] \Rightarrow 9n + 4 \equiv m + 26 [26] \Rightarrow 9n + 4 \equiv m [26]$

On en déduit que :

$$m \equiv 9n + 4 [26] \iff n \equiv 3m + 14 [26]$$

h) D'après la question (B.2a), si la lettre associée à l'entier n est codée en la lettre associée à m , alors :

$$m \equiv 9n + 4 [26] \iff n \equiv 3m + 14 [26]$$

- A est associé au nombre $m_1 = 0$ donc : $n_1 \equiv 3m_1 + 14 [26] \iff n_1 \equiv 3 \times 0 + 14 [26] \iff n_1 \equiv 14 [26]$.
Donc O a été codé en A.
- Q est associé au nombre $m_2 = 16$ donc : $n_2 \equiv 3m_2 + 14 [26] \iff n_2 \equiv 3 \times 16 + 14 [26] \iff n_2 \equiv 10 [26]$.
Donc K a été codé en Q.
- Le décodage du mot AQ est le mot **OK**.