B A C C A L A U R É A T G É N É R A L

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

- Série S -

Enseignement Spécialité **Coefficient : 9**

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1 à 8.

La page 8 est une annexe à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (6 points) commun à tous les candidats

Partie A

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^n e^{-x^2}\,dx\ .$$

On ne cherchera pas à calculer u_n en fonction de n.

1. **a.** Montrer que la suite (u_n) est croissante.

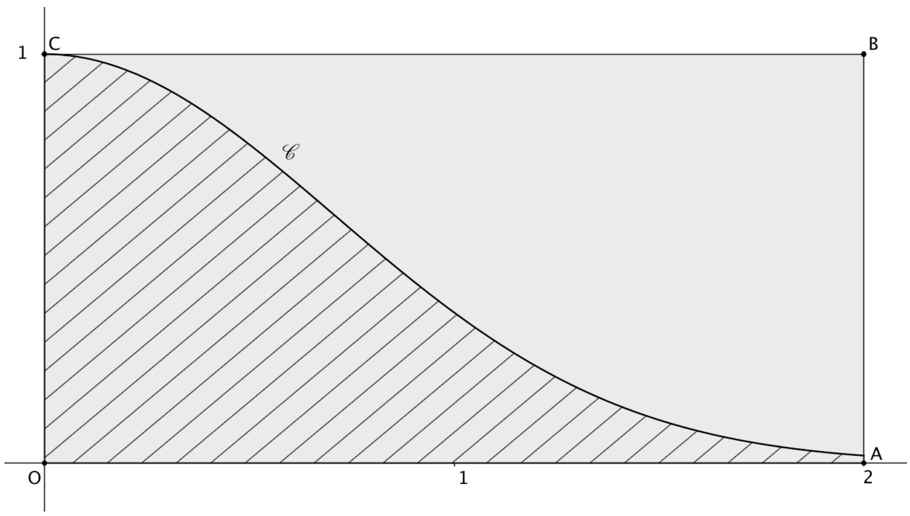
b. Démontrer que pour tout réel $x \geq 0$, on a : $-x^2 \leq -2x+1$, puis : $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$.

En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_n < \frac{\mathrm{e}}{2}$.

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas à calculer sa limite.

2. Dans cette question, on se propose d'obtenir une valeur approchée de u_2.

Dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0;2]$ par $f(x) = e^{-x^2}$, et le rectangle OABC où A(2;0), B(2;1) et C(0;1).
On a hachuré le domaine $\mathcal{D}$ compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.



On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir un point M au hasard à l'intérieur du rectangle OABC.
On admet que la probabilité p que ce point appartienne au domaine $\mathcal{D}$ est : $p = \frac{\text{Aire de } \mathcal{D}}{\text{Aire de OABC}}$.

a. Justifier que $u_2 = 2p$.

b. On considère l'algorithme suivant :

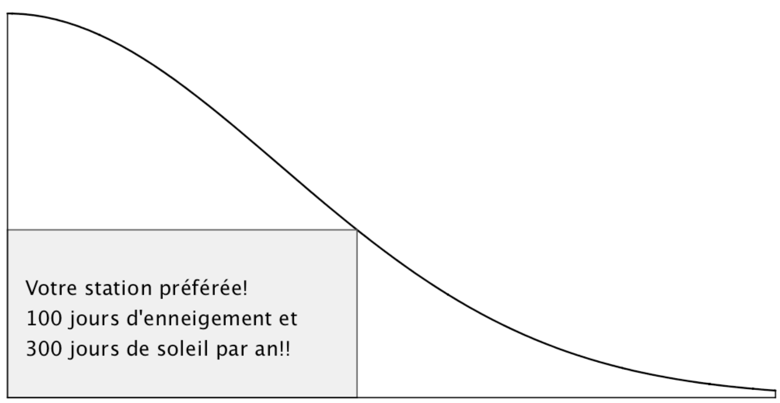
L1	**Variables** : N, C nombres entiers ; X, Y, F nombres réels
L2	**Entrée** : Saisir N
L3	**Initialisation** : C prend la valeur 0
L4	**Traitement** :
L5	Pour k variant de 1 à N
L6	X prend la valeur d'un nombre aléatoire entre 0 et 2
L7	Y prend la valeur d'un nombre aléatoire entre 0 et 1
L8	Si Y $\leq e^{-X^2}$ alors
L9	C prend la valeur C+1
L10	Fin si
L11	Fin pour
L12	Afficher C
L13	F prend la valeur C/N
L14	Afficher F

i. Que permet de tester la condition de la ligne L8 concernant la position du point M(X;Y) ?
ii. Interpréter la valeur F affichée par cet algorithme.
iii. Que peut-on conjecturer sur la valeur de F lorsque N devient très grand ?

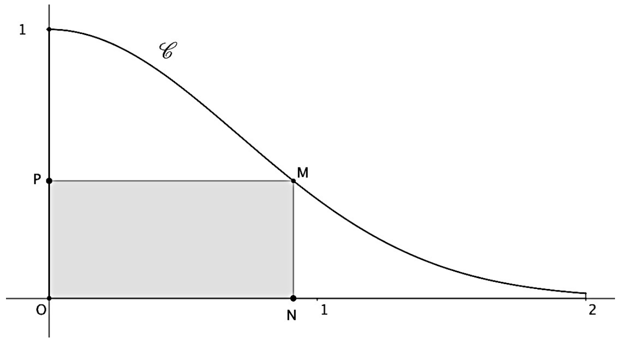
c. En faisant fonctionner cet algorithme pour $\mathrm{N} = 10^6$, on obtient $\mathrm{C} = 441138$.
On admet dans ce cas que la valeur F affichée par l'algorithme est une valeur approchée de la probabilité p à 10^{-3} près.
En déduire une valeur approchée de u_2 à 10^{-2} près.

Partie B

Une entreprise spécialisée est chargée par l'office de tourisme d'une station de ski de la conception d'un panneau publicitaire ayant la forme d'une piste de ski.
Afin de donner des informations sur la station, une zone rectangulaire est insérée sur le panneau comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Le panneau, modélisé par le domaine $\mathcal{D}$ défini dans la **Partie A**, est découpé dans une plaque rectangulaire de 2 mètres sur 1 mètre. Il est représenté ci-dessous dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$; l'unité choisie est le mètre.



Pour x nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;2]$, on note :

- M le point de la courbe $\mathscr{C}$ de coordonnées $(x; e^{-x^2})$,
- N le point de coordonnées $(x; 0)$,
- P le point de coordonnées $(0; e^{-x^2})$,
- $\mathrm{A}(x)$ l'aire du rectangle ONMP.

1. Justifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 2]$, on a : $\mathrm{A}(x) = xe^{-x^2}$.

2. Déterminer la position du point M sur la courbe $\mathscr{C}$ pour laquelle l'aire du rectangle ONMP est maximale.

3. Le rectangle ONMP d'aire maximale obtenu à la question **2.** doit être peint en bleu, et le reste du panneau en blanc. Déterminer, en m^2 et à 10^{-2} près, la mesure de la surface à peindre en bleu et celle de la surface à peindre en blanc.

Exercice 2 : (4 points) commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(0\,;\ \vec{u}\,,\vec{v}\,)$. À tout point M d'affixe z, on associe le point M$'$ d'affixe $z' = -z^2 + 2z$. Le point M$'$ est appelé image du point M.

1. Résoudre dans l'ensemble **C** des nombres complexes l'équation : $-z^2 + 2z - 2 = 0$.
En déduire les affixes des points dont l'image est le point d'affixe 2.

2. Soit M un point d'affixe z et M$'$ son image d'affixe z'.
On note N le point d'affixe $z_{\mathrm{N}} = z^2$.
Montrer que M est le milieu du segment [NM$'$].

3. Dans cette question, on suppose que le point M ayant pour affixe z, appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1. On note θ un argument de z.

a. Déterminer le module de chacun des nombres complexes z et z_{N}, ainsi qu'un argument de z_{N} en fonction de θ.

b. Sur la figure donnée en annexe **page 8**, on a représenté un point M sur le cercle $\mathcal{C}$.

Construire sur cette figure les points N et M$'$ en utilisant une règle et un compas (on laissera les traits de construction apparents).

c. Soit A le point d'affixe 1. Quelle est la nature du triangle AMM$'$?

La page 8 contenant l'annexe est à rendre avec la copie.

Exercice 3 : (5 points) commun à tous les candidats

Tous les résultats demandés seront arrondis au millième.

1. Une étude effectuée sur une population d'hommes âgés de 35 à 40 ans a montré que le taux de cholestérol total dans le sang, exprimé en grammes par litre, peut être modélisé par une variable aléatoire T qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1{,}84$ et d'écart type $\sigma = 0{,}4$.

a. Déterminer selon cette modélisation la probabilité qu'un sujet tiré au hasard dans cette population ait un taux de cholestérol compris entre 1,04 g/L et 2,64 g/L.

b. Déterminer selon cette modélisation la probabilité qu'un sujet tiré au hasard dans cette population ait un taux de cholestérol supérieur à 1,2 g/L.

2. Afin de tester l'efficacité d'un médicament contre le cholestérol, des patients nécessitant d'être traités ont accepté de participer à un essai clinique organisé par un laboratoire.
Dans cet essai, 60 % des patients ont pris le médicament pendant un mois, les autres ayant pris un placebo (comprimé neutre).

On étudie la baisse du taux de cholestérol après l'expérimentation.
On constate une baisse de ce taux chez 80 % des patients ayant pris le médicament.
On ne constate aucune baisse pour 90 % des personnes ayant pris le placebo.

On choisit au hasard un patient ayant participé à l'expérimentation et on note :

- M l'événement « le patient a pris le médicament » ;
- B l'événement « le taux de cholestérol a baissé chez le patient ».

a. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

b. Calculer la probabilité de l'événement B.

c. Calculer la probabilité qu'un patient ait pris le médicament sachant que son taux de cholestérol a baissé.

3. Le laboratoire qui produit ce médicament annonce que 30 % des patients qui l'utilisent présentent des effets secondaires.
Afin de tester cette hypothèse, un cardiologue sélectionne de manière aléatoire 100 patients traités avec ce médicament.

a. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de patients suivant ce traitement et présentant des effets secondaires.

b. L'étude réalisée auprès des 100 patients a dénombré 37 personnes présentant des effets secondaires.
Que peut-on en conclure ?

c. Pour estimer la proportion d'utilisateurs de ce médicament présentant des effets secondaires, un organisme indépendant réalise une étude basée sur un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 %.

Cette étude aboutit à une fréquence observée de 37 % de patients présentant des effets secondaires, et à un intervalle de confiance qui ne contient pas la fréquence 30 %.
Quel est l'effectif minimal de l'échantillon de cette étude ?

Exercice 4 : (5 points) pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points $A(1;5;-2)$, $B(7;-1;3)$ et $C(-2;7;-2)$ et on note $\mathcal{P}$ le plan (ABC).
On cherche une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ sous la forme : $ax + by + cz = 73$, où a, b et c sont des nombres réels.

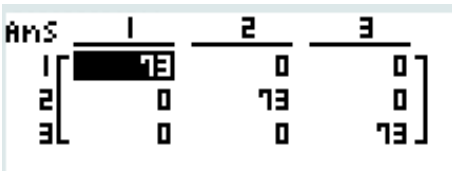
On note X et Y les matrices colonnes : $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que X vérifie la relation : $MX = 73Y$, où M est la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 7 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

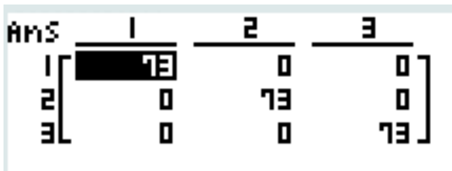
2. Soit N la matrice : $N = \begin{pmatrix} 19 & 4 & -13 \\ -8 & 6 & 17 \\ -47 & 17 & 36 \end{pmatrix}$.

À l'aide d'une calculatrice, on a calculé les produits $M \times N$ et $N \times M$, et on a obtenu les copies d'écran suivantes :

Pour $M \times N$:



Pour $N \times M$:



À l'aide de ces informations, justifier que la matrice M est inversible et exprimer sa matrice inverse M^{-1} en fonction de la matrice N.

3. Montrer alors que : $X = NY$.
En déduire que le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne : $10x + 15y + 6z = 73$.

Partie B

L'objectif de cette partie est l'étude des points à coordonnées entières du plan $\mathcal{P}$ ayant pour équation cartésienne : $10x + 15y + 6z = 73$.

1. Soit $M(x;y;z)$ un point appartenant au plan $\mathcal{P}$ et au plan d'équation $z = 3$. On suppose que les coordonnées x, y et z appartiennent à l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs.

a. Montrer que les entiers x et y sont solutions de l'équation (E) : $2x + 3y = 11$.

b. Justifier que le couple $(7;-1)$ est une solution particulière de (E) puis résoudre l'équation (E) pour x et y appartenant à $\mathbf{Z}$.

c. Montrer qu'il existe exactement deux points appartenant au plan $\mathcal{P}$ et au plan d'équation $z = 3$ et dont les coordonnées appartiennent à l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels. Déterminer les coordonnées de ces deux points.

2. Dans cette question, on se propose de déterminer tous les points $M(x; y; z)$ du plan $\mathcal{P}$ dont les coordonnées sont des entiers naturels.

Soient x, y et z des entiers naturels tels que $10x + 15y + 6z = 73$.

- **a.** Montrer que y est impair.
- **b.** Montrer que : $x \equiv 1\ [\ 3\ ]$. On admet que : $z \equiv 3\ [\ 5\ ]$.
- **c.** On pose alors : $x = 1 + 3p$, $y = 1 + 2q$ et $z = 3 + 5r$, où p, q et r sont des entiers naturels. Montrer que le point $M(x; y; z)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $p + q + r = 1$.
- **d.** En déduire qu'il existe exactement trois points du plan $\mathcal{P}$ dont les coordonnées sont des entiers naturels. Déterminer les coordonnées de ces points.

ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 2