∽ Corrigé du baccalauréat S Nouvelle-Calédonie & Wallis et Futuna ∾

26 février 2018

Exercice 1 (4 points)
Commun à tous les candidats

1. Une variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 100 et d'écart-type 36.
On a alors, à 10^{-3} près :

a. $P(X \leqslant 81{,}2) \approx 0{,}542$

b. $\boxed{P(X \leqslant 81{,}2) \approx 0{,}301}$

c. $P(81{,}2 \leqslant X \leqslant 103{,}8) \approx 0{,}542$

d. $P(81{,}2 \leqslant X \leqslant 103{,}8) \approx 0{,}301$

Résultat obtenu à la calculatrice.

2. Une variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 50 et d'écart-type 2.
Une variable aléatoire N suit la loi normale centrée réduite. On a alors :

a. $P(X > 52) = \dfrac{1 - P(-2 < N < 2)}{2}$

b. $P(X > 52) = 1 - P(-2 < N < 2)$

c. $\boxed{P(X > 52) = \dfrac{1 - P(-1 < N < 1)}{2}}$

d. $P(X > 52) = 1 - P(-1 < N < 1)$

Si X suit la loi normale de paramètres $\mu = 50$ et $\sigma = 2$, alors la loi $N = \dfrac{X - 50}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

$X > 52 \iff X - 50 > 2 \iff \dfrac{X - 50}{2} > 1$ donc $P(X > 52) = P(N > 1)$.

$P(N > 1) = P(N < -1)$ et $P(-1 < N < 1) = 1 - (P(N < -1) + P(N > 1))$ donc

$P(-1 < N < 1) = 1 - 2P(N > 1)$ et donc $P(N > 1) = \dfrac{1 - P(-1 < N < 1)}{2}$.

3. Une variable aléatoire T suit une loi exponentielle telle que $P(T > 2) = 0{,}5$.
Une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité $P_{(T>2)}(T > 5)$ est égale à :

a. $\boxed{0{,}35}$

b. 0,54

c. 0,53

d. $\dfrac{\text{e}}{2}$

La loi exponentielle étant une loi à durée de vie sans vieillissement,
$P_{(T>2)}(T > 5) = P(T > 5 - 2) = P(T > 3)$.
D'après le cours : $P(T > 3) < P(T > 2)$.

Donc la seule réponse possible est celle qui est inférieure à 0,5 donc c'est 0,35.

4. Une urne contient 5 boules bleues et 3 boules grises indiscernables au toucher.
On tire successivement de manière indépendante 5 boules avec remise dans cette urne. On note alors X la variable aléatoire comptant le nombre de boules grises tirées.
On note $E(X)$ l'espérance de X. On a alors :

a. $E(X) = 3$

b. $E(X) = \dfrac{3}{8}$

c. $\boxed{P(X \geqslant 1) \approx 0{,}905 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$

d. $P(X \geqslant 1) \approx 0{,}095$ à 10^{-3} près

La probabilité de tirer une boule grise est égale à $\dfrac{3}{8}$; donc la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \dfrac{3}{8}$.

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \dbinom{5}{0}\left(\dfrac{3}{8}\right)^0\left(1 - \dfrac{3}{8}\right)^5 = 1 - \left(\dfrac{5}{8}\right)^5 \approx 0{,}905$

Exercice 2 (5 points)
Commun à tous les candidats

Soient les deux nombres complexes : $z_1 = 1 - \text{i}$ et $z_2 = -8 - 8\sqrt{3}\,\text{i}$. On pose : $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. On calcule la forme algébrique de Z.
$Z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1-\text{i}}{-8-8\sqrt{3}\,\text{i}} = \dfrac{(1-\text{i})\left(-8+8\sqrt{3}\,\text{i}\right)}{\left(-8-8\sqrt{3}\,\text{i}\right)\left(-8+8\sqrt{3}\,\text{i}\right)} = \dfrac{-8+8\sqrt{3}\,\text{i}+8\,\text{i}+8\sqrt{3}}{64+192}$
$= \dfrac{-8+8\sqrt{3}}{256} + \text{i}\,\dfrac{8+8\sqrt{3}}{256} = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{32} + \text{i}\,\dfrac{1+\sqrt{3}}{32}$

2. On écrit z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
   - $|z_1| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$; $z_1 = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \text{i}\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ donc $-\dfrac{\pi}{4}$ est un argument de z_1
   La forme exponentielle de z_1 est $\sqrt{2}\,\text{e}^{-\text{i}\,\frac{\pi}{4}}$.
   - $|z_2| = \sqrt{(-8)^2+(-8\sqrt{3})^2} = \sqrt{256} = 16$; $z_2 = 16\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ donc $-\dfrac{2\pi}{3}$ est un argument de z_2.
   La forme exponentielle de z_2 est $16\,\text{e}^{-\text{i}\,\frac{2\pi}{3}}$.

3. On écrit Z sous forme exponentielle puis sous forme trigonométrique.
$Z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}\,\text{e}^{-\text{i}\,\frac{\pi}{4}}}{16\,\text{e}^{-\text{i}\,\frac{2\pi}{3}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{16}\,\text{e}^{\,\text{i}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)} = \dfrac{\sqrt{2}}{16}\,\text{e}^{\,\text{i}\,\frac{5\pi}{12}}$ donc $Z = \dfrac{\sqrt{2}}{16}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + \text{i}\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

4. En comparant la forme algébrique et la forme trigonométrique de Z, on obtient :
$\dfrac{\sqrt{2}}{16}\cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{32} \iff \cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{16}{\sqrt{2}} \times \dfrac{-1+\sqrt{3}}{32} \iff \cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$
$\iff \cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \iff \cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

5. On admet que $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
et que pour tous réels a et b, $\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a+b)$.
Soit (E) l'équation : $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cos x - \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\sin x = -2\sqrt{3}$.
$(E) \iff \left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\cos x - \left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos\dfrac{5\pi}{12}\cos x - \sin\dfrac{5\pi}{12}\sin x = \cos\dfrac{5\pi}{6}$
$\iff \cos\left(x + \dfrac{5\pi}{12}\right) = \cos\dfrac{5\pi}{6} \iff x + \dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$ ou $x + \dfrac{5\pi}{12} = -\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
$\iff x = \dfrac{5\pi}{12} + k2\pi$ ou $x = -\dfrac{5\pi}{4} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 3 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 14 \\ u_{n+1} & = & 2u_n - 5. \end{array}\right.$

   Soit la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = u_n - 5$. Donc $u_n = t_n + 5$.

   Affirmation A : La suite (t_n) est une suite géométrique.

   $t_{n+1} = u_{n+1} - 5 = (2u_n - 5) - 5 = 2u_n - 10 = 2(t_n + 5) - 10 = 2t_n + 10 - 10 = 2t_n$

   Donc la suite (t_n) est géométrique de raison $q = 2$ et de 1^er^ terme $t_0 = u_0 - 5 = 14 - 5 = 9$.

   Affirmation A **vraie**

   Affirmation B : Pour tout entier naturel n, $u_n = 9 \times 2^n + 5$.

   La suite (t_n) est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $t_0 = 9$ donc, pour tout entier naturel n, $t_n = t_0 \times q^n = 9 \times 2^n$.

   Pour tout n, $u_n = t_n + 5$ donc pour tout n, $u_n = 9 \times 2^n + 5$.

   Affirmation B **vraie**

2. Soit une suite (v_n).

   Affirmation C : Si, pour tout entier naturel n supérieur à 1, $-1 - \dfrac{1}{n} \leqslant v_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$ alors la suite (v_n) converge.

   Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{(-1)^n}{2}$. Cette suite n'est pas convergente mais elle vérifie $-1 - \dfrac{1}{n} \leqslant v_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$.

   Affirmation C **fausse**

3. **Affirmation D :** Pour tout entier naturel n non nul,
   $(8 \times 1 + 3) + (8 \times 2 + 3) + \cdots + (8 \times n + 3) = n(4n + 7)$.

   $$\begin{aligned}(8 \times 1 + 3) + (8 \times 2 + 3) + \cdots + (8 \times n + 3) &= 8 \times (1 + 2 + \cdots + n) + 3n = 8 \times \frac{n(n+1)}{2} + 3n \\ &= 4n(n+1) + 3n = n(4n + 4 + 3) = n(4n + 7)\end{aligned}$$

   Affirmation D **vraie**

4. Soit (w_n) une suite convergente.

   Affirmation E : Si, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (w_n) sont strictement positifs, alors la limite de la suite (w_n) est aussi strictement positive.

   Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul par $w_n = \dfrac{1}{n}$. Tous les termes de la suite sont strictement positifs et la suite (w_n) converge vers 0.

   Affirmation E **fausse**

Exercice 4 (6 points)
Commun à tous les candidats

Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Partie A

Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, $g(x) = -2x^3 + x^2 - 1$.

1. **a.** On étudie les variations de la fonction g en déterminant le signe de sa dérivée.
   $g'(x) = -6x^2 + 2x = 2x(-3x+1)$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$-3x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   Donc la fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$, strictement croissante sur $\left[0\,;\frac{1}{3}\right]$, et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

   b. On détermine les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.
   La fonction g est une fonction polynôme donc sa limite en l'infini est la limite en l'infini de son terme de plus haut degré :
   $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} -2x^3 = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} -2x^3 = -\infty$

2. $g(0) = -1 < 0$, $g\left(\frac{1}{3}\right) = -\dfrac{26}{27} < 0$ et $g(-1) = 2 > 0$
   On établit le tableau de variations de la fonction g :

x	$-\infty$	-1	α	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	2	0	↘ -1 ↗	$-\frac{26}{27}$ ↘	$-\infty$

   On peut déduire de ce tableau de variations que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α, et que α appartient à l'intervalle $[-1\,,0]$.

3. On déduit également du tableau que $g(x) > 0$ sur $]-\infty\,,\alpha[$ et que $g(x) < 0$ sur $]\alpha\,,+\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x,

$$f(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3\right)\mathrm{e}^{-2x+1}.$$

1. On calcule $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+x+x^2+x^3\right) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \\ \left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -2x+1 = +\infty \\ \text{On pose } X = -2x+1 \\ \displaystyle\lim_{X\to+\infty} \mathrm{e}^{X} = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-2x+1} = +\infty\end{array}\right\} \overset{\text{produit}}{\Longrightarrow}$$

   $\lim\left(1+x+x^2+x^3\right)\mathrm{e}^{-2x+1} = -\infty$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. **a.** On multiplie l'inégalité $x > 1$ par x (strictement positif) : $x^2 > x$. On multiplie cette dernière inégalité par x et on obtient $x^3 > x^2$.
   Pour $x > 1$, on a donc : $1 < x < x^2 < x^3$.

b. Pour $x > 1$, on a $1 < x < x^2 < x^3$ donc $0 < 1 + x + x^2 + x^3 < 4x^3$.
Comme pour tout x, $\text{e}^{-2x+1} > 0$, l'inégalité $0 < 1 + x + x^2 + x^3 < 4x^3$ entraîne
$0 < \left(1 + x + x^2 + x^3\right) \text{e}^{-2x+1} < 4x^3 \text{e}^{-2x+1}$ ou autrement dit : $0 < f(x) < 4x^3 \text{e}^{-2x+1}$

c. On admet que, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^n\text{e}^{-x} = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{e}^{-2x+1} = \text{e}^{-2x} \times \text{e}^{1} = \text{e}\ \text{e}^{-2x} \\ 4x^3 = \dfrac{8x^3}{2} = \dfrac{1}{2}(2x)^3 \end{array}\right\} \Longrightarrow 4x^3\,\text{e}^{-2x+1} = \frac{\text{e}}{2}(2x)^3\,\text{e}^{-2x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty \\ \text{On pose } X = 2x \\ \displaystyle\lim_{X\to+\infty} X^3\,\text{e}^{-X} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} (2x)^3\,\text{e}^{-2x} = 0 \iff \lim_{x\to+\infty} 4x^3\,\text{e}^{-2x+1} = 0$$

d. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
D'après la question précédente, si $x > 1$, alors $0 < f(x) < 4x^3\,\text{e}^{-2x+1}$. Si x tend vers $+\infty$, on peut supposer que $x > 1$ donc l'inégalité $0 < f(x) < 4x^3\,\text{e}^{-2x+1}$ est vérifiée.
On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 4x^3\,\text{e}^{-2x+1} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$.

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1 + 2x + 3x^2\right)\text{e}^{-2x+1} + \left(1 + x + x^2 + x^3\right)(-2)\,\text{e}^{-2x+1} \\ &= \left(1 + 2x + 3x^2 - 2 - 2x - 2x^2 - 2x^3\right)\text{e}^{-2x+1} = \left(-2x^3 + x^2 - 1\right)\text{e}^{-2x+1} = g(x)\,\text{e}^{-2x+1} \end{aligned}$$

4. Pour tout x, $\text{e}^{-2x+1} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.
Donc : sur $]-\infty\,, \alpha[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty\,, \alpha]$;
sur $]\alpha\,, +\infty[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $[\alpha\,, +\infty[$.