Corrigé du baccalauréat S Nouvelle-Calédonie 26 février 2018

Exercice 1 (4 points)
Commun à tous les candidats

Une justification (parfois sommaire) est donnée ici, elle n'est pas attendue du candidat.

1. **Réponse b.**
   La proposition **a.** peut être éliminée tout de suite : comme 81,2 est inférieur à la moyenne de X, la probabilité ne peut être supérieure à 0,5.
   On calcule à la calculatrice la probabilité $P(X \leqslant 81{,}2)$ et on obtient environ 0,300 758, donc 0,301 à 10^{-3} près.
2. **Réponse c.**
   Puisque X suit la loi normale de moyenne 50 et d'écart-type 2, on sait que pour centrer X, il faut lui soustraire sa moyenne, et que pour réduire, il faut diviser par l'écart-type.
   Donc N et $\dfrac{X-50}{2}$ suivent la loi normale centrée réduite.
   $X > 52 \iff X-50 > 2$
   $\iff \dfrac{X-50}{2} > 1$, car un écart-type est toujours positif.
   $\iff N > 1$
   Aucune des propositions n'est $P(N > 1)$, donc il faut chercher un événement ayant la même probabilité que $(N > 1)$.
   Puisque la loi normale et une loi continue, on sait que la probabilité d'une issue isolée est nulle, donc $P(X > 52) = P(N > 1) = P(N \geqslant 1)$
   Par symétrie de la loi normale centrée réduite, on sait que $(N \geqslant 1)$ et $(N \leqslant -1)$ ont la même probabilité. Ces deux événements sont clairement incompatibles, donc la probabilité de leur réunion est la somme des deux probabilités, soit le double de $P(X > 52)$.
   On a donc : $P(X > 52) = \dfrac{1}{2}\big(P(N \geqslant 1) + P(N \leqslant -1)\big) = \dfrac{1}{2}P\big((N \geqslant 1) \cup (N \leqslant -1)\big)$
   Finalement $P(X > 52) = \dfrac{1}{2}P\left(\overline{-1 < N < 1}\right) = \dfrac{1-P(-1<N<1)}{2}$.
3. **Réponse a.**
   Première approche : On détermine le paramètre λ de la loi exponentielle et on calcule la probabilité.
   Puisque T suit la loi exponentielle de paramètre λ, on a $P(T > 2) = \mathrm{e}^{-2\lambda} = 0{,}5$.
   On en déduit que $-2\lambda = \ln(0{,}5) = -\ln(2)$, et donc finalement, $\lambda = \dfrac{\ln(2)}{2}$.
   On a alors :
   $$P_{(T>2)}(T>5) = \dfrac{P\big((T>5)\cap(T>2)\big)}{P(T>2)} = \dfrac{P(T>5)}{0{,}5} = \dfrac{\mathrm{e}^{-5\lambda}}{0{,}5} = \dfrac{1}{0{,}5\times\left(\sqrt{2}\right)^5} = \dfrac{\sqrt{2}}{8} \approx 0{,}353$$
   Deuxième approche : On détermine le paramètre, mais on utilise le caractère « durée de vie sans vieillissement » de la loi exponentielle, et donc on a un calcul un peu plus simple après avoir déterminé λ :
   $$P_{(T>2)}(T>5) = P(T>3) = \mathrm{e}^{-3\lambda} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^3}\dfrac{\sqrt{2}}{8} \approx 0{,}353$$
   Troisième approche : En utilisant uniquement le caractère « sans vieillissement » de la loi exponentielle.

$P_{(T>2)}(T>5) = P(T>3)$ est, comme l'événement $(T>3)$ est inclus dans $(T>2)$, on en déduit que $P(T>3) \leqslant P(T>2) = 0{,}5$. Les propositions **b.**, **c.**, et **d.** sont donc automatiquement disqualifiées (cette dernière l'était de toutes façons, puisque $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ est strictement supérieur à 1, donc n'est pas une probabilité), seule reste **a.**

4. Réponse c.

— On a une expérience simple, à deux issues (tirer une boule grise : le succès, ou tirer une boule bleue : l'échec), avec une probabilité de succès p égale à $\dfrac{3}{8} = 0{,}375$.

— Cette épreuve de Bernoulli est répétée de façon indépendante 5 fois. On a donc un schéma de Bernoulli, de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}375$.

— La variable aléatoire X compte le nombre de succès de ce schéma de Bernoulli, donc elle suit la loi binomiale $\mathscr{B}(5\,;\,0{,}375)$

Par propriété, l'espérance $E(X)$ est donnée par $E(X) = np = 5 \times 0{,}375 = 1{,}875$: les propositions **a.** et **b.** sont donc fausses.

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} 0{,}375^0 \times (1 - 0{,}375)^5 \approx 0{,}905$.

(On peut aussi utiliser la calculatrice pour calculer directement $P(X \geqslant 1)$).

Exercice 2 (5 points)
Commun à tous les candidats

1. Donnons la forme algébrique de Z : $Z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \times \overline{z_2}}{z_2 \times \overline{z_2}} = \dfrac{z_1 \times \overline{z_2}}{|z_2|^2}$ donc

$$Z = \dfrac{(1-\mathrm{i})(-8+8\sqrt{3}\,\mathrm{i})}{(-8)^2 + (-8\sqrt{3})^2} = \dfrac{-8+8\sqrt{3}\,\mathrm{i} + 8\,\mathrm{i} - 8\sqrt{3}\,\mathrm{i}^2}{8^2 + 3\times 8^2} = \dfrac{(-8+8\sqrt{3}) + \mathrm{i}\,(8+8\sqrt{3})}{4\times 8^2}$$

$$Z = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{32} + \mathrm{i}\,\dfrac{1+\sqrt{3}}{32}$$

Comme les deux nombres $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{32}$ et $\dfrac{1+\sqrt{3}}{32}$ sont réels, cette dernière expression est la forme algébrique de Z.

2. On a : $|z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ et $|z_2| = \sqrt{4\times 8^2} = 16$ (en réutilisant ce que l'on avait déjà calculé à la question **1.**).

Si on note θ_1 et θ_2 les arguments respectifs de z_1 et z_2, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} \cos(\theta_1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta_1) = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \quad \text{donc on a } \theta_1 = -\dfrac{\pi}{4} \quad (2\pi) \qquad \text{puis}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \cos(\theta_2) = \dfrac{-8}{16} = \dfrac{-1}{2} \\ \sin(\theta_2) = \dfrac{-8\sqrt{3}}{16} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \quad \text{donc on a } \theta_2 = \pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{-2\pi}{3} \quad (2\pi).$$

3. Z sous forme exponentielle donne : $Z = \dfrac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{16\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{16}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4} - \mathrm{i}\frac{-2\pi}{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{16}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-3\pi}{12} + \mathrm{i}\frac{8\pi}{12}}$

Finalement, la forme exponentielle de Z est $Z = \dfrac{\sqrt{2}}{16}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$

Et donc, une forme trigonométrique est $Z = \dfrac{\sqrt{2}}{16}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$

4. On en déduit que $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\mathscr{R}e(Z)}{|Z|} = \dfrac{\dfrac{-1+\sqrt{3}}{32}}{\dfrac{\sqrt{2}}{16}} = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{32} \times \dfrac{16}{\sqrt{2}} = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2\times\sqrt{2}}$

$\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{(-1+\sqrt{3})\times\sqrt{2}}{2\times 2} = \dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Finalement, on a bien $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

5. On va nommer (E) l'équation à résoudre :

$(E) : \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cos x - \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\sin x = -2\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}
(E) &\iff \frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cos x - \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\sin x}{4} = \frac{-2\sqrt{3}}{4}\\
&\iff \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cos x - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\sin x = \frac{-\sqrt{3}}{2}\\
&\iff \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\cos x - \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\sin x = \cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\\
&\iff \cos\left(\frac{5\pi}{12}+x\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) \quad \text{en appliquant la formule rappelée dans l'énoncé}\\
&\iff \frac{5\pi}{12}+x = \frac{7\pi}{6} \quad (2\pi) \quad \text{ou} \quad \frac{5\pi}{12}+x = -\frac{7\pi}{6} \quad (2\pi)\\
&\iff x = \frac{14\pi}{12}-\frac{5\pi}{12} \quad (2\pi) \quad \text{ou} \quad x = -\frac{14\pi}{12}-\frac{5\pi}{12} \quad (2\pi)\\
&\iff x = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} \quad (2\pi) \quad \text{ou} \quad x = \frac{-19\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} \quad (2\pi)
\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc $\mathscr{S} = \left\{\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi ; \dfrac{5\pi}{12}+2k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice 3 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Affirmation A : Vraie

Déterminons la relation de récurrence de $\left(t_n\right)$. Soit n un entier naturel :

$t_{n+1} = u_{n+1}-5 = (2u_n-5)-5 = 2u_n-10 = 2(u_n-5) = 2t_n$.

Cette relation de récurrence est celle d'une suite géométrique de raison $q=2$ et de premier terme $t_0 = u_0-5 = 9$

La suite (t_n) est bien une suite géométrique.

Affirmation B : Vraie

Puisque $\left(t_n\right)$ est géométrique, on en déduit que pour tout naturel n, on a $t_n = t_0\times q^n = 9\times 2^n$, et donc $u_n = t_n+5 = 9\times 2^n+5$, ce qui est la formule proposée.

2. Affirmation C : Fausse

On peut avoir l'impression d'un théorème des gendarmes, mais il manque un élément : les deux suites "gendarmes" ne convergent pas vers la même limite, donc il manque une des conditions pour que le théorème s'applique.

On va donc choisir un exemple de suite $\left(v_n\right)$ vérifiant les conditions, mais ne convergeant pas. Un exemple simple est la suite de terme général $v_n = (-1)^n$.

Selon la parité de n, v_n vaut 1 ou -1, mais quoi qu'il advienne, on aura pour tout naturel $n \geqslant 1$: $\quad -1-\dfrac{1}{n} \leqslant -1 \leqslant v_n \leqslant 1 \leqslant 1+\dfrac{1}{n}$.

Donc la suite $\left(v_n\right)$ vérifie les hypothèses de l'affirmation C, mais elle n'est pas convergente (on peut considérer que c'est un exemple classique, la divergence de la suite est donc connue).

3. **Affirmation D : Vraie**
Dans la somme que l'on va noter $S = (8\times 1+3)+(8\times 2+3)+\ldots+(8\times n+3)$ on reconnaît la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique, de premier terme $8+3=11$ et de raison $r=8$.
La formule classique est donc $S = \dfrac{1^{\text{er}}\text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}\times(\text{nombre de termes})$
soit, ici $S = \dfrac{11+(8n+3)}{2}\times n = \dfrac{14+8n}{2}\times n = n(4n+7)$.
4. **Affirmation E : Fausse**
Ici, c'est « presque » vrai, le problème est le « strictement » avec cette hypothèse, on peut garantir que la limite sera positive, mais pas strictement.
Pour prouver que c'est faux, il suffit d'un exemple simple. Considérons la suite de terme général $w_n = \dfrac{1}{n}$
Les termes de cette suite sont strictement positifs dès le premier (pour $n=1$), et la suite est convergente, mais elle converge vers 0, qui n'est pas strictement positif. (strictement positif voulant dire strictement supérieur à 0).

Exercice 4 (6 points)
Commun à tous les candidats

Partie A

1. **a.** La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est une fonction polynôme), et si on note g' sa fonction dérivée, on a pour tout x réel :
$g'(x) = -6x^2+2x = 2x(1-3x)$.
La fonction dérivée est un polynôme de degré 2, dont les racines sont 0 et $\dfrac{1}{3}$ et dont le coefficient dominant est négatif (-6). Le signe de $g'(x)$ est donc strictement négatif pour toutes les valeurs de x, sauf celles qui sont comprises entre les deux racines.
On peut en déduire que g est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0]$ ainsi que sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$ et que g est croissante strictement sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{1}{3}\right]$.
b. On a : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -2x^3 = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2+1 = +\infty$, donc par limite de la somme, on en déduit : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.
Au voisinage de $+\infty$, sous la forme actuelle de g, on a une forme indéterminée. On a, pour tout x non nul : $g(x) = -2x^3\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}\right)$.
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} = -2x^3 = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3} = 0$, donc, par limite de la somme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right) = 1$, et par limite du produit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -2x^3\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right) = -\infty$
Et donc, finalement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
2. À l'aide des informations des questions précédentes, on peut dresser le tableau de variations de la fonction g (les images de 0 et surtout de $\dfrac{1}{3}$ sont calculées à la calculatrice) :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{-26}{27}$	$\searrow$	$-\infty$

L'observation de ce tableau permet de conclure que $\dfrac{-26}{27} < 0$ est le maximum de g sur $\mathbb{R}^+$, et donc pour tout réel x positif, $g(x) \leqslant \dfrac{-26}{27} < 0$, donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}^+$.

Sur l'intervalle $\mathbb{R}^-$, la fonction g est continue (c'est une fonction polynôme), strictement décroissante et 0 est une valeur intermédiaire entre $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et $g(0) = -1$.

D'après le corollaire au théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^-$, que l'on va noter α.

Finalement, l'équation a une unique solution sur $\mathbb{R}^-$, et pas de solution sur $\mathbb{R}^+$, donc elle a bien une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Vérifions maintenant que α est dans $[-1\,;\,0]$. $g(-1) = 2 > 0$, donc on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[-1\,;\,0]$ et l'unique solution sur $\mathbb{R}$, doit se trouver entre -1 et 0, donc on a bien $\alpha \in [-1\,;\,0]$.

3. Comme g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$, on a :

$x < \alpha \Longrightarrow g(x) > g(\alpha)$: g est à valeurs strictement positives sur $]-\infty\,;\,\alpha[$.

$\alpha < x < 0 \Longrightarrow g(x) < g(\alpha) = 0$ et en considérant le fait que g est majorée par un nombre strictement négatif sur $\mathbb{R}^+$, on a donc g à valeurs strictement négatives sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

Partie B

1. On a, pour tout x réel non nul : $\quad f(x) = x^3\left(\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} + 1\right)\mathrm{e}^{-2x+1}$.

Déterminons la limite en $-\infty$:

On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -2x+1 = +\infty$ et donc, par composition :

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-2x+1} = \lim_{y\to+\infty} \mathrm{e}^{y} = +\infty$.

Puis : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right) = 1$

et finalement, par limite du produit : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^3\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right)\mathrm{e}^{-2x+1} = -\infty$

et donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. **a.** Soit x réel tel que $x > 1$,

$1 < x$, et en multipliant par x, strictement positif, on obtient : $\quad x < x^2$.

On multiplie cette nouvelle inégalité par x, et on a : $\quad x^2 < x^3$.

Donc par transitivité, on a bien établi : $\quad 1 < x < x^2 < x^3$.

b. Soit x un réel tel que $x > 1$.

D'après la question précédente on a : $\quad 1 < x < x^2 < x^3$.

On a donc aussi : $\quad 0 < 1 < x < x^2 < x^3$

On en déduit : $\quad 0+0+0+0 < 1+x+x^2+x^3 < x^3+x^3+x^3+x^3$

Soit $\quad 0 < 1 + x + x^2 + x^3 < 4x^3$

Comme la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, on peut donc multiplier cette inégalité par e^{-2x+1} et on arrive bien à :

$$0 < f(x) < 4x^3$$

c. Soit x un nombre réel.

$4x^3\,\mathrm{e}^{-2x+1} = 4x^3\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{e}^{1}$ d'après les propriétés de l'exponentielle.

$$= \frac{1}{2}8x^3\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{e} = \frac{\mathrm{e}}{2}2^3x^3\,\mathrm{e}^{-2x} = \frac{\mathrm{e}}{2}(2x)^3\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

On a bien établi que, pour tout x réel, on a : $\quad 4x^3\,\mathrm{e}^{-2x+1} = \dfrac{\mathrm{e}}{2}(2x)^3\,\mathrm{e}^{-2x}$.

On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ et, d'après l'énoncé, pour tout naturel n, on a :

$\displaystyle\lim_{y\to+\infty} y^n\,\mathrm{e}^{-y} = 0$. On va appliquer cette formule avec $n = 3$ et $y = 2x$, par composition, on en déduit : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (2x)^3\,\mathrm{e}^{-2x} = 0$.

Comme $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ est une constante, par limite du produit, on en déduit :

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 4x^3\,\mathrm{e}^{-2x+1} = 0$.

d. La limite de f en $+\infty$ est déterminée en utilisant le théorème des gendarmes : pour x supérieur à 1, f est encadrée entre la fonction $x \longmapsto 4x^3\,\mathrm{e}^{-2x+1}$ et la fonction constante égale à 0.

Cet encadrement valable pour $x > 1$ est suffisant car on étudie la limite quand x tend vers $+\infty$.

Puisque les deux fonctions "gendarmes" ont 0 pour limite quand x tend vers $+\infty$, on en déduit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Graphiquement, cela signifie que la droite d'équation $y = 0$ (c'est-à-dire l'axe des abscisses) est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(0 + 1 + 2x + 3x^2\right)\mathrm{e}^{-2x+1} + \left(1 + x + x^2 + x^3\right) \times (-2) \times \mathrm{e}^{-2x+1}\\ &= \Big(1 + 2x + 3x^2 - 2\left(1 + x + x^2 + x^3\right)\Big) \times \mathrm{e}^{-2x+1}\\ &= \left(1 + 2x + 3x^2 - 2 - 2x - 2x^2 - 2x^3\right) \times \mathrm{e}^{-2x+1}\\ &= \left(-2x^3 + x^2 - 1\right) \times \mathrm{e}^{-2x+1}.\end{aligned}$$

On a bien établi que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \left(-2x^3 + x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-2x+1}$.

C'est-à-dire $f'(x) = g(x)\,\mathrm{e}^{-2x+1}$

4. La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, donc le signe de $f'(x)$ est donné par le signe de $g(x)$. À l'aide des résultats de la partie A, on en déduit que $f'(x)$ est strictement positif sur $]-\infty\,;\,\alpha[$ et donc que f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,\alpha]$, et que sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ est strictement négatif, et donc que f est décroissante strictement sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.

Remarque : Dans ce corrigé, on a étudié la stricte monotonie, ce qui n'était pas demandé, on pouvait se contenter de la croissance ou décroissance au sens large.

On a aussi utilisé que l'annulation ponctuelle de la dérivée (en $x = \alpha$, par exemple) ne change pas la stricte monotonie.