Math93.com

Baccalauréat 2018 - S
Nouvelle Calédonie

Série S Obligatoire
Février 2018

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. QCM — 4 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

1. Une variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 100 et d'écart-type 36. On a alors, à 10^{-3} près :

1. a. $P(X \leqslant 81,2) \approx 0,542$

1. b. $\boxed{P(X \leqslant 81,2) \approx 0,301}$

1. c. $P(81,2 \leqslant X \leqslant 103,8) \approx 0,542$

1. d. $P(81,2 \leqslant X \leqslant 103,8) \approx 0,301$

Preuve

La proposition **a.** peut être éliminée tout de suite : comme 81,2 est inférieur à la moyenne de X, la probabilité ne peut être supérieure à 0,5.

On calcule à la calculatrice la probabilité $P(X \leqslant 81,2)$ et on obtient environ 0,300 758, donc 0,301 à 10^{-3} près.

2. Une variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 50 et d'écart-type 2. Une variable aléatoire N suit la loi normale centrée réduite. On a alors :

2. a. $P(X > 52) = \dfrac{1 - P(-2 < N < 2)}{2}$

2. b. $P(X > 52) = 1 - P(-2 < N < 2)$

2. c. $\boxed{P(X > 52) = \dfrac{1 - P(-1 < N < 1)}{2}}$

2. d. $P(X > 52) = 1 - P(-1 < N < 1)$

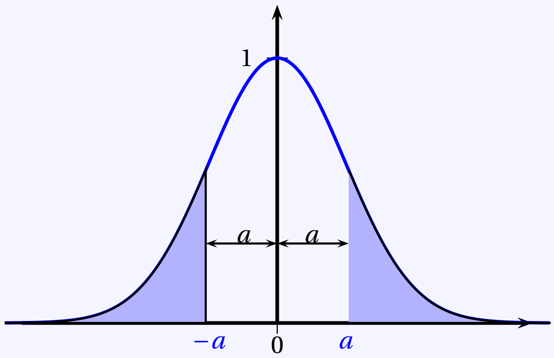
Propriété 1

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

2. a. La fonction Φ est définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(t) = P(X \leq t)$.

2. b. Pour tout réel a on a :

- (1) : $P(X \leq -a) = P(X \geq a)$
- (2) : $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$
- (3) : $P(-a \leq X \leq a) = 2\Phi(a) - 1$



Preuve

Si X suit la loi normale de paramètres $\mu = 50$ et $\sigma = 2$, alors la loi $N = \dfrac{X-50}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

$$X > 52 \iff X - 50 > 2 \iff \frac{X-50}{2} > 1$$

donc

$$P(X > 52) = P(N > 1)$$

D'après le 2.b. (3) du théorème (1) on a alors :

$$P(-1 < N < 1) = 1 - 2P(N < 1)$$

et puisque d'après le 2.b. (1) du théorème (1) on a : $P(N < 1) = P(N > 1)$ Alors

$$P(-1 < N < 1) = 1 - 2P(N > 1) \iff P(N > 1) = \frac{1 - P(-1 < N < 1)}{2}$$

3. Une variable aléatoire T suit une loi exponentielle telle que $P(T > 2) = 0,5$. Une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité $P_{(T>2)}(T > 5)$ est égale à :

3. a. $\boxed{0,35}$

3. b. $0,54$

3. c. $0,53$

3. d. $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$

Preuve

La loi exponentielle étant une loi à durée de vie sans vieillissement,

$$P_{(T>2)}(T > 5) = P(T > 5 - 2) = P(T > 3)$$

- <u>Méthode 1</u>
  D'après le cours : $P(T > 3) < P(T > 2)$.
  Donc la seule réponse possible est celle qui est inférieure à $0,5$ donc c'est $0,35$.
- <u>Méthode 2</u>

$$\begin{aligned} P(T > 2) = 0,5 &\iff \mathrm{e}^{-2\lambda} = 0,5 \\ &\iff -2\lambda = \ln 0,5 \\ &\iff \lambda = -\frac{\ln 0,5}{2} \\ &\iff \lambda = \frac{\ln 2}{2} \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} P_{(T>2)}(T > 5) &= P_{(T>2)}(T > 2 + 3) \\ &= P(T > 3) \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{3\ln 2}{2}} \\ &\approx \underline{0,354} \end{aligned}$$

4. Une urne contient 5 boules bleues et 3 boules grises indiscernables au toucher. On tire successivement de manière indépendante 5 boules avec remise dans cette urne. On note alors X la variable aléatoire comptant le nombre de boules grises tirées. On note $E(X)$ l'espérance de X. On a alors :

4. a. $E(X) = 3$

4. b. $E(X) = \dfrac{3}{8}$

4. c. $\boxed{P(X \geqslant 1) \approx 0{,}905 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$

4. d. $P(X \geqslant 1) \approx 0{,}095$ à 10^{-3} près

Preuve

La probabilité de tirer une boule grise est égale à $\dfrac{3}{8}$; donc la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \dfrac{3}{8}$.

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0}\left(\frac{3}{8}\right)^0\left(1 - \frac{3}{8}\right)^5 = 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^5 \approx \underline{0{,}905}$$

Exercice 2. Complexes 5 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Soient les deux nombres complexes : $z_1 = 1 - \mathrm{i}$ et $z_2 = -8 - 8\sqrt{3}\mathrm{i}$. On pose : $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. **Donner la forme algébrique de Z.**

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \times \overline{z_2}}{z_2 \times \overline{z_2}} = \frac{z_1 \times \overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

donc

$$Z = \frac{(1-\mathrm{i})(-8+8\sqrt{3}\,\mathrm{i})}{(-8)^2+(-8\sqrt{3})^2} = \frac{-8+8\sqrt{3}\,\mathrm{i}+8\,\mathrm{i}-8\sqrt{3}\,\mathrm{i}^2}{8^2+3\times 8^2} = \frac{(-8+8\sqrt{3})+\mathrm{i}\,(8+8\sqrt{3})}{4\times 8^2}$$

soit

$$\boxed{Z = \frac{-1+\sqrt{3}}{32} + \mathrm{i}\,\frac{1+\sqrt{3}}{32}}$$

2. **Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.**
On a (en réutilisant ce que l'on avait déjà calculé à la question **1.**) :

$$|z_1| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \text{ et } |z_2| = \sqrt{4\times 8^2} = 16$$

Si on note θ_1 et θ_2 les arguments respectifs de z_1 et z_2, on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta_1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta_1) = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{4} \quad (2\pi) \Longrightarrow \boxed{z_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}}$$

puis

$$\begin{cases} \cos(\theta_2) = \dfrac{-8}{16} = \dfrac{-1}{2} \\ \sin(\theta_2) = \dfrac{-8\sqrt{3}}{16} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \theta_2 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} = \frac{-2\pi}{3} \quad (2\pi) \Longrightarrow \boxed{z_2 = 16\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi/3}}$$

3. **Écrire Z sous forme exponentielle puis sous forme trigonométrique.**

$$Z = \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{16\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{16}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\frac{-2\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{16}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-3\pi}{12}+\mathrm{i}\frac{8\pi}{12}}$$

Finalement, la forme exponentielle de Z est

$$\boxed{Z = \frac{\sqrt{2}}{16}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}}$$

Et donc, une forme trigonométrique est

$$\boxed{Z = \frac{\sqrt{2}}{16}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12}\right)}$$

4. **En déduire que $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.**
On en déduit que

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\mathcal{Re}(Z)}{|Z|} = \frac{\dfrac{-1+\sqrt{3}}{32}}{\dfrac{\sqrt{2}}{16}} = \frac{-1+\sqrt{3}}{32} \times \frac{16}{\sqrt{2}} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\times\sqrt{2}}$$

et

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{(-1+\sqrt{3})\times\sqrt{2}}{2\times 2} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

Finalement, on a bien

$$\boxed{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

5. On admet que : $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et pour tous réels a et b, $\cos a\cos b-\sin a\sin b=\cos(a+b)$.
Résoudre l'équation suivante dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$: $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cos x-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\sin x=-2\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}
(E) &\iff \frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cos x-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\sin x}{4}=\frac{-2\sqrt{3}}{4}\\
&\iff \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cos x-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\sin x=\frac{-\sqrt{3}}{2}\\
&\iff \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\cos x-\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\sin x=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\\
&\iff \cos\left(\frac{5\pi}{12}+x\right)=\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\quad \text{en appliquant la formule rappelée dans l'énoncé}\\
&\iff \frac{5\pi}{12}+x=\frac{7\pi}{6}\quad(2\pi)\quad\text{ou}\quad \frac{5\pi}{12}+x=-\frac{7\pi}{6}\quad(2\pi)\\
&\iff x=\frac{14\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\quad(2\pi)\quad\text{ou}\quad x=-\frac{14\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\quad(2\pi)\\
&\iff x=\frac{9\pi}{12}=\frac{3\pi}{4}\quad(2\pi)\quad\text{ou}\quad x=\frac{-19\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}\quad(2\pi)
\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est donc :

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\frac{3\pi}{4}+2k\pi;\frac{5\pi}{12}+2k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}}$$

Exercice 3. Suites — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 & = & 14 \\ u_{n+1} & = & 2u_n - 5.\end{cases}$. Soit la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = u_n - 5$.
Affirmation A (Vraie) : La suite (t_n) est une suite géométrique.

> **Preuve**
> Déterminons la relation de récurrence de (t_n). Soit n un entier naturel :
>
> $$t_{n+1} = u_{n+1} - 5 = (2u_n - 5) - 5 = 2u_n - 10 = 2(u_n - 5) = 2t_n$$
>
> Cette relation de récurrence est celle d'une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $t_0 = u_0 - 5 = 9$
> La suite (t_n) est bien une suite géométrique.

Affirmation B (Vraie) : Pour tout entier naturel n, $u_n = 9 \times 2^n + 5$.

> **Preuve**
> Puisque (t_n) est géométrique, on en déduit que pour tout naturel n, on a
>
> $$t_n = t_0 \times q^n = 9 \times 2^n$$
>
> et donc
>
> $$u_n = t_n + 5 = 9 \times 2^n + 5$$

2. Soit une suite (v_n).
Affirmation C (Fausse) : Si, pour tout entier naturel n supérieur à 1, $-1 - \dfrac{1}{n} \leqslant v_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$, alors la suite (v_n) converge.

> **Preuve**
> Si on considère la suite (v_n) définie pour tout entier n non nul par $v_n = (-1)^n$. On a bien alors
>
> $$-1 - \frac{1}{n} \leq v_n \leq 1 + \frac{1}{n}$$
>
> Or la suite (v_n) ne converge pas puisque ses termes valent alternativement 1 et -1.

3. Affirmation D (vraie) : Pour tout entier naturel n non nul, $(8 \times 1 + 3) + (8 \times 2 + 3) + \ldots + (8 \times n + 3) = n(4n + 7)$.

> **Preuve**
> Dans la somme que l'on va noter
>
> $$S = (8 \times 1 + 3) + (8 \times 2 + 3) + \ldots + (8 \times n + 3)$$
>
> on reconnaît la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique, de premier terme $8 + 3 = 11$ et de raison $r = 8$.
> La formule classique est donc
>
> $$S = \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2} \times (\text{nombre de termes})$$

soit, ici

$$S = \frac{11+(8n+3)}{2} \times n = \frac{14+8n}{2} \times n = n(4n+7).$$

4. Soit (w_n) une suite convergente.
Affirmation E (fausse) : Si, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (w_n) sont strictement positifs, alors la limite de la suite (w_n) est aussi strictement positive.

Preuve

Pour prouver que c'est faux, il suffit d'un contre-exemple simple. Considérons la suite de terme général $w_n = \frac{1}{n}$

Les termes de cette suite sont strictement positifs dès le premier (pour $n = 1$), et la suite est convergente, mais elle converge vers 0, qui n'est pas strictement positif.

Exercice 4. Fonctions — 6 points

Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, $g(x) = -2x^3 + x^2 - 1$.

Partie A

1.

1. a. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est une fonction polynôme), et si on note g' sa fonction dérivée, on a pour tout x réel :

$$g'(x) = -6x^2 + 2x = 2x(1-3x)$$

La fonction dérivée est un polynôme de degré 2, dont les racines sont 0 et $\frac{1}{3}$ et dont le coefficient dominant est négatif (-6). Le signe de $g'(x)$ est donc strictement négatif pour toutes les valeurs de x, sauf celles qui sont comprises entre les deux racines.
On peut en déduire que g est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$ ainsi que sur l'intervalle $\left[\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$ et que g est croissante strictement sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{1}{3}\right]$.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de g		↘	-1	↗	$\frac{-26}{27}$	↘	

1. b. Limites

- Limites en $-\infty$.

  On a :
  $$\lim_{x\to-\infty} -2x^3 = +\infty$$
  et
  $$\lim_{x\to-\infty} x^2 + 1 = +\infty$$
  donc par limite de la somme, on en déduit :
  $$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$$

- Limites en $+\infty$. On factorise par le terme de plus haut degré pour lever l'indétermination.
  $$g(x) = -2x^3\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)$$
  $$\lim_{x\to+\infty} = -2x^3 = -\infty$$
  et
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$
  donc, par limite de la somme
  $$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) = 1$$
  et par limite du produit
  $$\lim_{x\to+\infty} -2x^3\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) = -\infty$$
  Et donc, finalement
  $$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée α, et que α appartient à $[-1\ ;\ 0]$.

x	$-\infty$		-1		α		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $g'(x)$				$-$			0	$+$	0	$-$	
Variations de g	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{-26}{27}$	$\searrow$	$-\infty$

- Sur l'intervalle $[0; +\infty[$: le nombre $\dfrac{-26}{27} < 0$ est le maximum de g sur $\mathbb{R}^+$, et donc $g(x) \leqslant \dfrac{-26}{27} < 0$, donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}^+$.
- Sur l'intervalle $]-\infty; -1]$: la fonction est décroissante et admet 2 comme minimum, donc l'équation n'a pas de solution dans $]-\infty; -1[$.
- Sur l'intervalle $[-1; 0]$.

Théorème 1 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\ ;\ b]$.

Remarque *: Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).*

- La fonction g est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle $[-1; 0]$;
- Le réel $k = 0$ est compris entre $g(-1) = 2$ et $g(0) = -1$
- Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[-1; 0]$.

3. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Le tableau de variations nous donne alors directement le signe de g.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie B

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, $f(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3\right) \mathrm{e}^{-2x+1}$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

On a, pour tout x réel non nul :

$$f(x) = x^3\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right) \mathrm{e}^{-2x+1}$$

Déterminons la limite en $-\infty$:

On a

$$\lim_{x \to -\infty} -2x + 1 = +\infty$$

et donc, par composition :

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-2x+1} = \lim_{y\to+\infty} \mathrm{e}^{y} = +\infty$$

Puis :

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right) = 1$$

et finalement, par limite du produit :

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right) \mathrm{e}^{-2x+1} = -\infty$$

et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2.

2. a. Démontrer que, pour tout $x > 1$, $1 < x < x^2 < x^3$.

Soit x réel tel que $x > 1$,

$1 < x$, et en multipliant par x, strictement positif, on obtient : $x < x^2$.

On multiplie cette nouvelle inégalité par x, et on a : $x^2 < x^3$.

Donc par transitivité, on a bien établi : $1 < x < x^2 < x^3$.

2. b. En déduire que, pour $x > 1$, $0 < f(x) < 4x^3\mathrm{e}^{-2x+1}$.

Soit x un réel tel que $x > 1$.

D'après la question précédente on a : $1 < x < x^2 < x^3$.

On a donc aussi : $0 < 1 < x < x^2 < x^3$

On en déduit : $0+0+0+0 < 1 + x + x^2 + x^3 < x^3 + x^3 + x^3 + x^3$

Soit $0 < 1 + x + x^2 + x^3 < 4x^3$

Comme la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, on peut donc multiplier cette inégalité par e^{-2x+1} et on arrive bien à :

$$0 < f(x) < 4x^3$$

2. c. On admet que, pour tout entier naturel n, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x} = 0$. Vérifier que, pour tout réel x, $4x^3\mathrm{e}^{-2x+1} = \dfrac{\mathrm{e}}{2}(2x)^3\mathrm{e}^{-2x}$ puis montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3\mathrm{e}^{-2x+1} = 0$.

Soit x un nombre réel.

$4x^3\,\mathrm{e}^{-2x+1} = 4x^3\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{e}^{1}$ d'après les propriétés de l'exponentielle.

$$= \frac{1}{2}8x^3\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{e} = \frac{\mathrm{e}}{2}2^3x^3\,\mathrm{e}^{-2x} = \frac{\mathrm{e}}{2}(2x)^3\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

On a bien établi que, pour tout x réel, on a : $4x^3\,\mathrm{e}^{-2x+1} = \dfrac{\mathrm{e}}{2}(2x)^3\,\mathrm{e}^{-2x}$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ et, d'après l'énoncé, pour tout naturel n, on a :

$\lim\limits_{y\to+\infty} y^n\,\mathrm{e}^{-y} = 0$. On va appliquer cette formule avec $n = 3$ et $y = 2x$, par composition, on en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x)^3\,\mathrm{e}^{-2x} = 0$.

Comme $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ est une constante, par limite du produit, on en déduit :

$\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3\,\mathrm{e}^{-2x+1} = 0$.

2. d. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. En utilisant la question précédente, déterminer la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.

La limite de f en $+\infty$ est déterminée en utilisant le théorème des gendarmes : pour x supérieur à 1, f est encadrée entre la fonction $x \longmapsto 4x^3\,\mathrm{e}^{-2x+1}$ et la fonction constante égale à 0.

Cet encadrement valable pour $x > 1$ est suffisant car on étudie la limite quand x tend vers $+\infty$.

Puisque les deux fonctions "gendarmes" ont 0 pour limite quand x tend vers $+\infty$, on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Graphiquement, cela signifie que la droite d'équation $y = 0$ (c'est-à-dire l'axe des abscisses) est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$

3. Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \left(-2x^3 + x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-2x+1}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(0+1+2x+3x^2\right)\mathrm{e}^{-2x+1} + \left(1+x+x^2+x^3\right) \times (-2) \times \mathrm{e}^{-2x+1}\\
&= \left(1+2x+3x^2-2\left(1+x+x^2+x^3\right)\right) \times \mathrm{e}^{-2x+1}\\
&= \left(1+2x+3x^2-2-2x-2x^2-2x^3\right) \times \mathrm{e}^{-2x+1}\\
&= \left(-2x^3+x^2-1\right) \times \mathrm{e}^{-2x+1}
\end{aligned}$$

On a bien établi que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \left(-2x^3 + x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-2x+1}$.

C'est-à-dire $\boxed{f'(x) = g(x)\,\mathrm{e}^{-2x+1}}$

4. À l'aide des résultats de la partie A, déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, donc le signe de $f'(x)$ est donné par le signe de $g(x)$. À l'aide des résultats de la partie A, on en déduit que $f'(x)$ est strictement positif sur $]-\infty\,;\,\alpha[$ et donc que f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,\alpha]$, et que sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ est strictement négatif, et donc que f est décroissante strictement sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.

Fin du devoir