∽ Corrigé du baccalauréat S Pondichéry 4 mai 2018 ∾

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. **Solution :** On cherche T_4.
   On applique l'algorithme pour $n = 4$ à l'aide de la calculatrice on trouve
   $T_4 \approx 463\,°\,\mathrm{C}$

2. **Solution :**
   Initialisation : pour $n = 0$
   $T_0 = 1\,000$ et $980 \times 0{,}82^0 + 20 = 1\,000$

   Hérédité : Soit n un entier naturel tel que $T_n = 980 \times 0{,}82^n + 20$ alors
   $$\begin{aligned} T_{n+1} &= 0{,}82 T_n + 3{,}6 \\ &= 0{,}82 \times (980 \times 0{,}82^n + 20) + 3{,}6 \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 980 \times 0{,}82^{n+1} + 16{,}4 + 3{,}6 \\ &= 980 \times 0{,}82^{n+1} + 20 \end{aligned}$$
   La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$ or elle est vérifiée à ce rang 0 donc par le principe de récurrence on vient de montrer que
   $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ T_n = 980 \times 0{,}82^n + 20$

3. **Solution :**
   On cherche le plus petit entier naturel n tel que $T_n \leqslant 70$
   On peut utiliser la calculatrice pour trouver $T_{14} \approx 80{,}9 > 70$ et $T_{15} \approx 69{,}9 < 70$ donc il faut attendre au minimum 15 heures avant de pouvoir ouvrir le four sans dommage.

   On peut aussi résoudre l'inéquation :
   $T_n \leqslant 70 \iff 980 \times 0{,}82^n + 20 \leqslant 70 \iff 0{,}82^n \leqslant \dfrac{5}{98} \iff n\ln(0{,}82) \leqslant \ln\left(\dfrac{5}{98}\right) \iff$
   $n \geqslant \dfrac{\ln\left(\dfrac{5}{98}\right)}{\ln(0{,}82)}$ car $\ln(0{,}82) < 0$
   et on a $\dfrac{\ln\left(\dfrac{5}{98}\right)}{\ln(0{,}82)} \approx 14{,}99$

Partie B

1. **Solution :** $f(0) = 1\,000 \iff a + b = 1\,000$
   de plus $f'(0) + \dfrac{1}{5}f(0) = 4 \iff f'(0) = -196$
   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}\,,\ f'(t) = -\dfrac{1}{5}a\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}$ d'où $f'(0) = -196 \iff \dfrac{1}{5}a = 196$

On a donc $\begin{cases} a+b=1\,000 \\ \dfrac{1}{5}a=196 \end{cases} \iff \begin{cases} b=20 \\ a=980 \end{cases}$

Finalement on a $\forall t \in [0\,;\,+\infty[\,,\ f(t)=980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}+20$

2.

$$f(t)=980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}+20.$$

a. Solution :

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{t}{5}\right)=-\infty$ or $\displaystyle\lim_{T\to-\infty}\mathrm{e}^{T}=0$ donc en posant $T=-\dfrac{t}{5}$ et par opération sur les limites on obtient

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty}f(t)=20.$

b. Solution :

D'après la question 1., $\forall t \in [0\,;\,+\infty[\,,\ f'(t)=-196\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}<0$

On en déduit que f est strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	$1\,000$	20

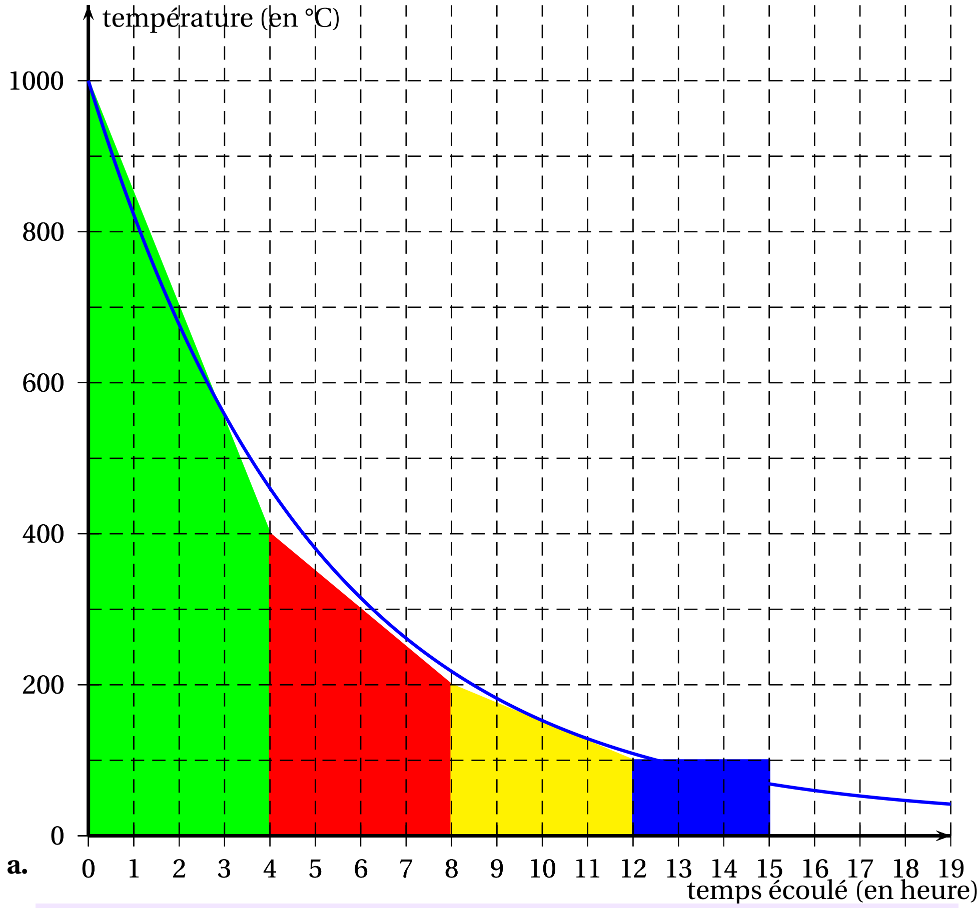
c. les céramiques ?

Solution : On cherche à résoudre l'équation $f(t)=70$

Sur $[0\,;\,+\infty[$, f est continue et strictement décroissante à valeurs dans $]20\,;\,1\,000]$ or $70\in]20\,;\,1\,000]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t)=70$ admet une unique solution α sur $[0\,;\,+\infty[$

Par dichotomie on trouve $\alpha\approx 14{,}9$ et comme f est strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$, on en déduit que $f(t)\leqslant 70 \iff t\geqslant\alpha$

D'après ce modèle on peut donc ouvrir le four après environ 15 heures de refroidissement.



3. **a.** **Solution :** Sur [0 ; 15] l'aire entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses peut-être approchée par les quatre trapèzes ci-dessus et on a alors

$\displaystyle\int_0^{15} f(t)\,\mathrm{d}t \approx 2\,800+1\,200+600+300 = 4\,900$ et donc la température moyenne est $\theta \approx \dfrac{4\,900}{15} \approx 327°$ C

Remarque : cette question laisse place à toute méthode d'approche de l'aire (par des rectangles, par des trapèzes...) et donc les résultats attendus peuvent être très divers. Ici le choix a été fait de trouver un minorant de l'aire par des rectangles

b. **Solution :**

$\displaystyle\int_0^{15} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{15}\left(980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}+20\right)\,\mathrm{d}t = \left[-4\,900\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}+20t\right]_0^{15} =$

$\left(-4\,900\mathrm{e}^{-3}+300\right)-(-4\,900) = 4\,900\left(1-\mathrm{e}^{-3}\right)+300$

d'où $\theta = \dfrac{1}{15}\displaystyle\int_0^{15} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{980}{3}\left(1-\mathrm{e}^{-3}\right)+20 \approx 330{,}4°$ C

4. **a.** **Solution :**

$d(t) = f(t)-f(t+1) = \left(980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}+20\right)-\left(980\mathrm{e}^{-\frac{t+1}{5}}+20\right) = 980\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}-\mathrm{e}^{-\frac{t+1}{5}}\right)$

On a donc bien $\forall t \in [0\,;\,+\infty[$, $d(t) = 980\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}$

b. **Solution :** $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\dfrac{t}{5}\right) = -\infty$ or $\lim\limits_{T\to-\infty} \mathrm{e}^{T} = 0$ donc en posant $T = -\dfrac{t}{5}$ et par opération sur les limites on obtient
$\lim\limits_{t\to+\infty} d(t) = 0$.
On peut donc en conclure que la température finira par se stabiliser et comme on a $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 20$, on en déduit que la température se stabilisera avec le temps à 20 ° C

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Les points A, B et C ont pour affixes respectives $a = -4$, $b = 2$ et $c = 4$.

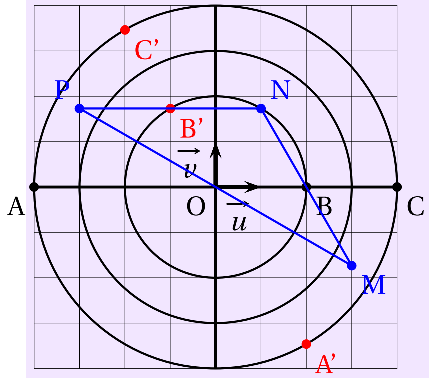
1. **a.** **Solution :** $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$

$a' = a\mathrm{j} = -4\mathrm{j} = 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3} = 4\left(-\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}\right) = 4\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}\right) = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right)} = 4\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{3}} = 4\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$

$b' = b\mathrm{j} = 2\mathrm{j} = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$

$c' = c\mathrm{j} = 4\mathrm{j} = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} = 4\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$

b. **Solution :**



$|a'| = 4$ donc A$'$ est sur le cercle de centre O et de rayon 4 et on a $Re(a') = 2$ et $Im(a') < 0$, on peut donc placer A$'$

$|b'| = 2$ donc B$'$ est sur le cercle de centre O et de rayon 2 et on a $Re(b') = -1$ et $Im(b') > 0$, on peut donc placer B$'$

$|c'| = 4$ donc C$'$ est sur le cercle de centre O et de rayon 4 et on a $Re(c') = -2$ et $Im(c') > 0$, on peut donc placer C$'$

2. **Solution :**

$a' = -c'$ donc A$'$ et C$'$ sont symétriques par rapport à O alors O, A$'$ et C$'$ sont alignés

$arg(b') = arg(c') = \dfrac{2\pi}{3}(2\pi)$ donc $\overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{OC'}$ sont colinéaires d'où O, B$'$ et C$'$ sont alignés

Finalement O, A$'$, B$'$ et C$'$ sont alignés

3. **Solution :**

$z_M = \dfrac{a'+c}{2} = 3 - i\sqrt{3}$, $z_N = \dfrac{c'+c}{2} = 1 + i\sqrt{3}$, $z_P = \dfrac{c'+a}{2} = -3 + i\sqrt{3}$

MNP semble isocèle en N d'après le dessin

MN=$|z_N - z_M| = \left|2 - 2i\sqrt{3}\right| = 4$ et PN=$|z_N - z_P| = |4| = 4$

On a MN=NP donc MNP est bien isocèle en N

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. a. **Solution :**
$X_{\text{U}} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0{,}58 ; 0{,}21^2\right)$ donc $P\left(X_{\text{U}} < 0{,}2\right) \approx 0{,}035$ et $P\left(0{,}5 \leqslant X_{\text{U}} < 0{,}8\right) \approx 0{,}501$

b. **Solution :** $P\left(X_{\text{U}} < 0{,}2\right) \approx 0{,}035$ signifie que la probabilité qu'un cristal se retrouve dans le récipient à fond étanche est de 0,035 environ ; donc pour 1 800g de sucre on peut estimer que $1\,800 \times 0{,}035 = 63$ g se retrouvent dans le récipient à fond étanche.

$P\left(0{,}5 \leqslant X_{\text{U}} < 0{,}8\right) \approx 0{,}501$ signifie que la probabilité qu'un cristal se retrouve dans le tamis 2 est de 0,501 environ

donc pour 1 800g de sucre on peut estimer que $1\,800 \times 0{,}501 = 901{,}8$ g se retrouvent dans le tamis 2.

2. **Solution :** On sait que si $X_{\text{V}} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0{,}65 ; \sigma_{\text{V}}^2\right)$ alors $Z = \dfrac{X_{\text{V}} - 0{,}65}{\sigma_{\text{V}}} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0 ; 1^2\right)$

On a ici $P\left(0{,}5 \leqslant X_{\text{V}} < 0{,}8\right) = 0{,}4$

$0{,}5 \leqslant X_{\text{V}} < 0{,}8 \iff -\dfrac{0{,}15}{\sigma_{\text{V}}} \leqslant Z < \dfrac{0{,}15}{\sigma_{\text{V}}}$

on a donc $P\left(-\dfrac{0{,}15}{\sigma_{\text{V}}} \leqslant Z < \dfrac{0{,}15}{\sigma_{\text{V}}}\right) = 0{,}4$ avec $Z \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0 ; 1^2\right)$

à l'aide de la calculatrice on trouve $\dfrac{0{,}15}{\sigma_{\text{V}}} \approx 0{,}524$ d'où $\sigma_{\text{V}} \approx 0{,}286$

Partie B

1. a. **Solution :** L'énoncé donne $P_U(E) = 0{,}03$, $P_V(E) = 0{,}05$, $P(U) = 0{,}3$ et $P(V) = 0{,}7$

On cherche $P(E)$

U et V forment une partition de l'univers, donc d'après les probabilités totales on a

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap U) + P(E \cap V) \\ &= P(U) \times P_U(E) + P(V) \times P_V(E) \\ &= 0{,}009 + 0{,}035 = 0{,}044 \end{aligned}$$

b. **Solution :** On cherche $P_E(U)$

$P_E(U) = \dfrac{P(E \cap U)}{P(E)} = \dfrac{0{,}009}{0{,}044} = \dfrac{9}{44} \approx 0{,}205$

2. **Solution :** on veut $P_E(U) = 0,3$

$$P_E(U) = \frac{P(E\cap U)}{P(E)} = 0,3 \Longleftrightarrow \frac{P(U)\times P_U(E)}{P(U)\times P_U(E)+P(V)\times P_V(E)} = 0,3$$
$$\Longleftrightarrow \frac{0,03P(U)}{0,03P(U)+0,05P(V)} = 0,3$$
$$\Longleftrightarrow 0,03P(U) = 0,009P(U)+0,015P(V)$$
$$\Longleftrightarrow 0,021P(U) = 0,015P(V)$$
$$\Longleftrightarrow P(U) = \frac{5}{7}P(V)$$

or $P(V) = 1-P(U)$ donc on a $P(U) = \frac{5}{7}(1-P(U)) \Longleftrightarrow \frac{12}{7}P(U) = \frac{5}{7} \Longleftrightarrow$

$P(U) = \frac{5}{12} \approx 0,417$

Si l'entreprise veut atteindre son objectif, elle doit donc acheter environ 41,7% de son sucre à l'exploitation U et 58,3% à V

Partie C

1. **Solution :** Ici on répète $n = 150$ fois de manière indépendante le prélèvement d'un paquet

La proportion annoncée de paquets provenant de l'exploitation U est $p = 0,3$.

On a $n \geqslant 30$, $np = 45 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 105 \geqslant 5$.

On peut donc bâtir l'intervalle de fluctuation asymptotique.

On peut affirmer au seuil de 95% que la fréquence observée de paquets de sucre provenant de l'exploitation U devrait appartenir à l'intervalle

$I_n = \left[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.

$p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,227$ et $p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,373$

La fréquence observée est $f = \frac{30}{150} = 0,2 \notin I_n$.

On peut donc rejeter l'affirmation au seuil de 95%.

2. **Solution :** l'échantillon est de taille $n = 150$, la fréquence observée de paquets provenant de l'exploitation U est $f = 0,42$

On a $n \geqslant 30$, $nf = 63 \geqslant 5$ et $n(1-f) = 87 \geqslant 5$.

On peut donc bâtir l'intervalle de confiance.

On peut affirmer avec une confiance à 95 % que la proportion p de paquets de sucre provenant de l'exploitation U devrait appartenir à l'intervalle

$I = \left[f-\frac{1}{\sqrt{n}} ; f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$. $f-\frac{1}{\sqrt{n}} \approx 0,3384$ et $f-\frac{1}{\sqrt{n}} \approx 0,5016$

Un intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 % est donc environ

$I = [0,339 ; 0,501]$.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).

Solution : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (CD), et (CD) passe par C(0 ; 3 ; 2)

on obtient une représentation paramétrique de (CD) : $\begin{cases}x = t\\ y = 3 \\ z = 2-t\end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

2. Soit M un point de la droite (CD).

a. Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.

Solution : B(4 ; −1 ; 0). Soit t le paramètre associé à M alors M(t ; 3 ; $2-t$).
Alors $BM^2 = (t-4)^2 + (4)^2 + (2-t)^2 = 2t^2 - 12t + 36 = 2(t^2 - 6t + 18)$
BM est minimale quand BM^2 l'est donc quand $t^2 - 6t + 18$ est minimal.
On sait que tout polynôme de la forme $at^2 + bt + c$ avec $a > 0$ admet un minimum en $t = -\dfrac{b}{2a}$
ici BM sera donc minimale pour $t = 3$ soit pour M(3 ; 3 ; −1)

b. **Solution :** $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$
On en déduit que (BH) et (CD) sont perpendiculaires

c. **Solution :** D'après ce qui précède, on a (BH) est la hauteur issue de B dans BCD.
On a alors $\mathscr{A}_{BCD} = \dfrac{1}{2} \times CD \times BH = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{32} \times \sqrt{18} = \sqrt{144} = 12$ u. a.
L'aire de BCD est donc bien de 12 cm^2

3. **a.** **Solution :**
$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ ne sont évidement pas colinéaires donc B, C et D définissent bien un plan.
$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BC} = -8+4+4 = 0$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{CD} = 8+0-8 = 0$
$\overrightarrow{n}$ est donc bien normal au plan (BCD) car orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan

b. **Solution :**
$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (BCD) donc (BCD) : $2x + y + 2z + d = 0$
C(0 ; 3 ; 2) appartient à (BCD) donc $2x_C + y_C + 2z_C + d = 0 \iff d = -7$
Finalement (BCD) : $2x + y + 2z - 7 = 0$

c. **Solution :** Δ est orthogonale au plan (BCD) donc elle admet $\overrightarrow{n}$ pour vecteur directeur, on a alors

$$\Delta : \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1+t \\ z = 4+2t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

d. **Solution :**

I est un point de (BCD) donc $2x_\mathrm{I} + y_\mathrm{I} + 2z_\mathrm{I} - 7 = 0$

de plus $\mathrm{I} \in \Delta$ donc il existe un réel t tel que

$2(2+2t)+(1+t)+2(4+2t)-7=0 \iff 9t=-6 \iff t=-\dfrac{2}{3}$

On en déduit $\mathrm{I}\left(\dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{8}{3}\right)$

Remarque : on pouvait aussi simplement vérifier que les coordonnées proposées correspondaient à un point de Δ et à un point de (BCD)

Solution :

Δ est perpendiculaire au plan (BCD) en I et passe par A, on en déduit que AI est la hauteur du tétraèdre ABCD de base BCD. $\mathrm{AI}=\sqrt{\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2}=2$

$\mathcal{V}_{\mathrm{ABCD}} = \dfrac{1}{3} \times AI \times \mathcal{A}_{\mathrm{BCD}} = 8\ \mathrm{cm}^3$

EXERCICE 4 **5points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Cryptage

1. **Solution :**
Dans l'alphabet la lettre « N » est associée à $x = 13$ alors $x(x+B) = 13 \times 26 = 338 = 33 \times 10 + 8 \equiv 8[33]$
Bob code la lettre « N » avec le nombre $y = 8$

2. **Solution :**
Dans l'alphabet la lettre « O » est associée à $x = 14$ alors $x(x+B) = 14 \times 27 = 378 = 33 \times 11 + 15 \equiv 15[33]$
Bob code la lettre « O » avec le nombre $y = 15$

Partie B : Décryptage

1. **Solution :** $x(x+13) \equiv 3 \quad [33] \iff x^2 + 13x \equiv 3\ [33]$
$\iff x^2 + 13x + 33x \equiv 3\ [33] \quad \text{car} \quad 33x \equiv 0\ [33]$
$\iff x^2 + 46x + 529 \equiv 3 + 1\ [33] \quad \text{car} \quad 529 = 16 \times 33 + 1 \equiv 1\ [33]$
$\iff (x+23)^2 \equiv 4\ [33]$

2. a. **Solution :**
si $(x+23)^2 \equiv 4\ [33]$ alors il existe un entier k tel que $(x+23)^2 = 33k + 4$
$(x+23)^2 = 33k + 4 = 3 \times 11k + 4 \equiv 4\ [3]$
$(x+23)^2 = 33k + 4 = 11 \times 3k + 4 \equiv 4\ [11]$
finalement si $(x+23)^2 \equiv 4\ [33]$ alors le système d'équations
$\left\{\begin{array}{lcl}(x+23)^2 & \equiv & 4\ [3]\\ (x+23)^2 & \equiv & 4\ [11]\end{array}\right.$ est vérifié.

b. **Solution :** si $(x+23)^2 \equiv 4\ [11]$ alors il existe un entier k' tel que $(x+23)^2 = 11k' + 4$
or $(x+23)^2 \equiv 4\ [3]$ on a alors $11k' + 4 \equiv 4\ [3] \iff 11k' \equiv 0\ [3]$
donc 3 divise $11k'$ or 3 ne divise pas 11
donc d'après le théorème de Gauss, on en déduit que 3 divise k'.
Il existe donc un entier r tel que $k' = 3r$
alors $(x+23)^2 = 11k' + 4 = 33r + 4 \equiv 4\ [33]$
Finalement si $\left\{\begin{array}{lcl}(x+23)^2 & \equiv & 4\ [3]\\ (x+23)^2 & \equiv & 4\ [11]\end{array}\right.$ alors $(x+23)^2 \equiv 4\ [33]$

c. **Solution :** $(x+23)^2 \equiv 4\ [3] \iff (x+23)^2 \equiv 1\ [3]$ car $4 \equiv 1\ [3]$ donc
dans la question **a.** on a montré que $x(x+13) \equiv 3\ [33] \implies$
$\left\{\begin{array}{lcl}(x+23)^2 & \equiv & 1\ [3]\\ (x+23)^2 & \equiv & 4\ [11]\end{array}\right.$

Dans la question **b.** on a montré que $\left\{\begin{array}{rcl}(x+23)^2 & \equiv & 1\ [3]\\ (x+23)^2 & \equiv & 4\ [11]\end{array}\right. \Longrightarrow$
$x(x+13) \equiv 3\ [33]$

On a donc bien $x(x+13) \equiv 3\ [33] \iff \left\{\begin{array}{rcl}(x+23)^2 & \equiv & 1\ [3]\\ (x+23)^2 & \equiv & 4\ [11]\end{array}\right.$

3. **a.** **Solution :**

a	0	1	2
a^2	0	1	4
congruence avec 3	0	1	1

Les entiers naturels a tels que $0 \leqslant a < 3$ et $a^2 \equiv 1\ [3]$ sont 1 et 2

b. **Solution :**

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
congruence avec 11	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1

Les entiers naturels b tels que $0 \leqslant b < 11$ et $b^2 \equiv 4\ [11]$ sont 2 et 9

4. **a.** **Solution :**

On sait que $x(x+13) \equiv 3 \quad [33] \iff \left\{\begin{array}{lcl}(x+23)^2 & \equiv & 1\ [3]\\ (x+23)^2 & \equiv & 4\ [11]\end{array}\right.$

D'après ce qui précède on a

$$(x+23)^2 \equiv 1\ [3] \iff \left\{\begin{array}{l}x+23 \equiv 1\ [3]\\ \text{ou}\\ x+23 \equiv 2\ [3]\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x \equiv -22\ [3]\\ \text{ou}\\ x \equiv -21\ [3]\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x \equiv 2\ [3]\\ \text{ou}\\ x \equiv 0\ [3]\end{array}\right.$$

$$(x+23)^2 \equiv 4 \quad [11] \iff \left\{\begin{array}{l}x+23 \equiv 2\ [11]\\ \text{ou}\\ x+23 \equiv 9\ [11]\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x \equiv -21\ [11]\\ \text{ou}\\ x \equiv -14\ [11]\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x \equiv 1 \quad [11]\\ \text{ou}\\ x \equiv 8\ [11]\end{array}\right.$$

$x(x+13) \equiv 3 \quad [33] \iff \left\{\begin{array}{lcl}(x+23)^2 & \equiv & 1\ [3]\\ (x+23)^2 & \equiv & 4\ [11]\end{array}\right.$ est donc équivalent aux quatre systèmes donnés

b. **Solution :** $\left\{\begin{array}{lcl}x & \equiv & 2\ [3]\\ x & \equiv & 8\ [11]\end{array}\right. \iff x = 8$, $\left\{\begin{array}{lcl}x & \equiv & 0\ [3]\\ x & \equiv & 1\ [11]\end{array}\right. \iff x = 12$

$\left\{\begin{array}{lcl}x & \equiv & 2\ [3]\\ x & \equiv & 1\ [11]\end{array}\right. \iff x = 23$, $\left\{\begin{array}{lcl}x & \equiv & 0\ [3]\\ x & \equiv & 8\ [11]\end{array}\right. \iff x = 30$

5. **Solution :**

Pour x allant de 0 à 32
    Si le reste de la division de $x(x+13)$ par 33 est égal à 3 alors
        Afficher x
    Fin Si
Fin Pour

6. **Solution :** La première lettre du message de Bob a été codée par 3, d'après ce qui précède cela signifie que cette première lettre peut être I, M, X ou E (si on considère $30 \equiv 4\ [26]$)

Il est donc impossible pour Alice d'utiliser le « chiffre de RABIN » pour décoder un message lettre par lettre