Math93.com

Baccalauréat 2018 - S
Correction Pondichéry

Série S Obli. et Spé.

4 Mai 2018

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. Fonction — 6 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1 000 °C. À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit. On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint. La température du four est exprimée en degré Celsius (° C). La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70 ° C. Sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.

Partie A

Pour un nombre entier naturel n, on note T_n la température en degré Celsius du four au bout de n heures écoulées à partir de l'instant où il a été éteint. On a donc $T_0 = 1000$. La température T_n est calculée par l'algorithme suivant :

```
T ← 1000
Pour i allant de 1 à n
        T ← 0,82 × T + 3,6
Fin Pour
```

1. **Déterminer la température du four, arrondie à l'unité, au bout de 4 heures de refroidissement.**
   La variable T prend successivement les valeurs suivantes (arrondies à l'unité) :

i		1	2	3	4
T	1000	824	679	560	463

   Au bout de 4 heures de refroidissement la température du four est d'environ 463 degré Celcius.

2. **Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$.**
   Montrons par récurrence que $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$.

   - Initialisation : Si $n = 0$ alors $980 \times 0,82^0 + 20 = 1000 = T_0$. La propriété est vraie au rang 0
   - Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang n : $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$. Montrons qu'elle est également vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire que $T_{n+1} = 980 \times 0,82^{n+1} + 20$.

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= 0,82 Tn + 3,6 \\
&= 0,82\left(980 \times 0,82^n + 20\right) + 3,6 \\
&= 980 \times 0,82^{n+1} + 16,4 + 3,6 \\
T_{n+1} &= 980 \times 0,82^{n+1} + 20
\end{aligned}$$

     La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
   - Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire. Par conséquent, pour tout entier naturel n on a $T_n = Tn \leq 70$.

3. Au bout de combien d'heures le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques?
On veut déterminer la valeur du plus petit entier naturel n tel que : $Tn \leq 70$ soit :

$$Tn \leq 70 \iff 980 \times 0,82^n + 20 \leq 70$$
$$Tn \leq 70 \iff 0,82^n \leq \frac{50}{980}$$

On compose par la fonction ln qui est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, l'ordre est inchangé :

$$Tn \leq 70 \iff \ln 0,82^n \leq \ln\frac{50}{980}$$
$$Tn \leq 70 \iff n \ln 0,82 \leq \ln\frac{50}{980}$$

On divise alors les deux membres par ln O,82 qui est négatif

$$Tn \leq 70 \iff n \geq \frac{\ln\frac{50}{980}}{\ln 0,82} \approx 14,99$$

Le four peut être ouvert sans risque pour les céramiques au bout de <u>15 heures</u>.

Partie B

Dans cette partie, on note t le temps (en heure) écoulé depuis l'instant où le four a été éteint. La température du four (en degré Celsius) à l'instant t est donnée par la fonction f définie,pour tout nombre réel t positif, par : $f(t) = ae^{-\frac{t}{5}} + b$ *où a et b sont deux nombres réels. On admet que f vérifie la relation suivante :* $f'(t) + \frac{1}{5}f(t) = 4$.

1. Déterminer les valeurs de a et b sachant initialement, la température du four est de 1 000 °C, c'est-à-dire que $f(0) = 1000$.

- D'une part :
$$f(0) = 1000 \iff ae^{-\frac{t}{5}} + b = 1000 \iff a + b = 1000$$
- D'autre part :
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec $f'(t) = -\frac{a}{5}\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}$ donc pour $t = 0$ on obtient en utilisant la relation fonctionnelle $f'(t) + \frac{1}{5}f(t) = 4$:
$$f'(0) + \frac{1}{5}f(0) = 4 \iff -\frac{a}{5}\mathrm{e}^{-0/5} + \frac{1}{5}\left(a\mathrm{e}^{-0/5} + b\right) = 4 \iff -\frac{a}{5} + \frac{a+b}{5} = 4$$
- Il reste alors à résoudre le système :
$$\begin{cases} a + b = 1000 \\ -\frac{a}{5} + \frac{a+b}{5} = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 1000 \\ -\frac{a}{5} + \frac{1000}{5} = 4 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a + b = 1000 \\ a = -5 \times (4 - 200) = 980 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} b = 20 \\ a = 980 \end{cases}$$

Pour tout nombre réel positif t : $f(t) = 980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + 20$.

2. Pour la suite, on admet que, pour tout nombre réel positif t : $f(t) = 980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + 20$.

2. a. Déterminer la limite de f lorsque t tend vers $+\infty$.

Propriété 1 (Limites liées à la fonction exponentielle)

- (1) limites usuelles :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0 \end{cases}$$
- (2) croissances comparées :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0 \end{cases}$$
- (3) (nombre dérivé en 0) :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} -\dfrac{t}{5} = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{t\to+\infty} 980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} = 0 \Longrightarrow \lim_{t\to+\infty} f(t) = 20$$

Et donc la limite de f lorsque t tend vers $+\infty$ est 20.

2. b. Étudier les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$. En déduire son tableau de variations complet.

Pour tout réel t de $\mathbb{R}_+$ on a :

$$f'(t) = -\frac{980}{5}\mathrm{e}^{-t/5} = -196\mathrm{e}^{-t/5}$$

La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction dérivée f' est strictement négative sur $\mathbb{R}_+$ et f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

t	0	α	$+\infty$
Signe de $f'(t)$		$-$	
Variations de f	1000	70	20

2. c. Avec ce modèle, après combien de minutes le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques? On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+$ l'inéquation $f(t) \leq 70$.

$$f(t) \leq 70 \iff 980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + 20 \leq 70$$
$$f(t) \leq 70 \iff \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} \leq \frac{50}{980}$$

On compose par la fonction ln qui est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, l'ordre est inchangé :

$$f(t) \leq 70 \iff \ln \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} \leq \ln\frac{50}{980}$$
$$f(t) \leq 70 \iff -\frac{t}{5} \leq \ln\frac{50}{980}$$
$$f(t) \leq 70 \iff t \geq -5\times\ln\frac{50}{980} \approx 14,878$$

Or

$$-5\times\ln\frac{50}{980}\,\mathrm{h} = -5\times\ln\frac{50}{980}\times 60\,\mathrm{min} \approx 892,3\,\mathrm{min}$$

On peut donc ouvrir le four sans risque au bout de <u>893 minutes</u>.

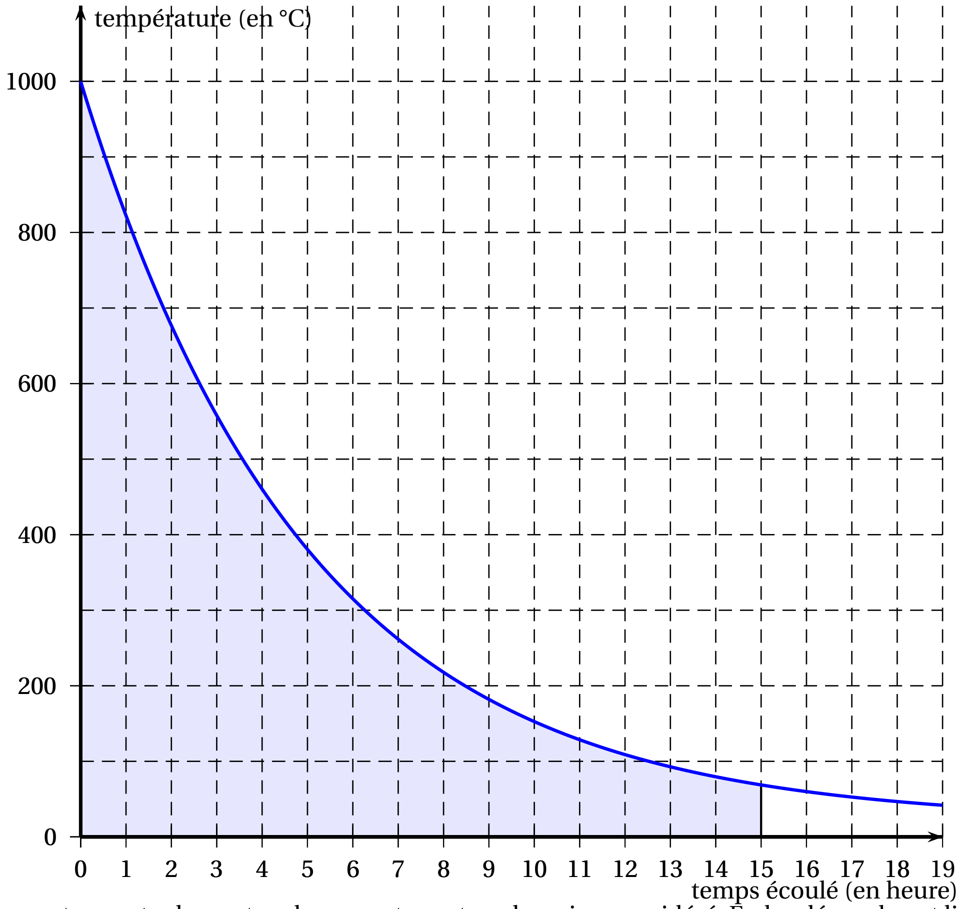
3. La température moyenne (en degré Celsius) du four entre deux instants t_1 et t_2 est donnée par : $\dfrac{1}{t_2 - t_1}\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t$.

3. a. À l'aide de la représentation graphique de f ci-dessous, donner une estimation de la température moyenne θ du four sur les 15 premières heures de refroidissement. Expliquer votre démarche.

La valeur moyenne de la fonction f sur $[0\ ;\ 15]$ est donnée par la formule :

$$m = \frac{1}{15-0} \times \int_0^{15} f(x)\,\mathrm{d}x$$

La fonction étant positive sur cet intervalle, il suffit d'obtenir une valeur approchée de l'aire située sous la courbe, au dessus de l'axe des abscisse et entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = 15$.



On peut simplement compter les rectangles appartenant au domaine considéré. En les dénombrant ligne par ligne on en compte environ :

$$14 + 11 + 7 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1 = 48$$

L'aire peut donc être estimée par : 48×100 u.a..

La valeur moyenne de la fonction f sur $[0\ ;\ 15]$ est donc estimée par :

$$m = \frac{1}{15} \times \int_0^{15} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{4800}{15} \approx \underline{320°}$$

3. b. Calculer la valeur exacte de cette température moyenne θ et en donner la valeur arrondie au degré Celsius.

La fonction f est continue sur $[0\ ;\ 15]$ donc y admet des primitives. Une primitives de f sur $[0\ ;\ 15]$ est par exemple :

$$F(t) = -5 \times 980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + 20t$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\theta = \frac{1}{15} \times \int_0^{15} f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{15} \times \Big(F(15) - F(0)\Big) \\ &= \frac{1}{15} \times \left(-5 \times 980\mathrm{e}^{-\frac{15}{5}} + 20 \times 15 - \left(-5 \times 980\mathrm{e}^{-\frac{0}{5}}\right)\right) \\ \theta &= \frac{-4900\,\mathrm{e}^{3} + 5200}{15} \approx \underline{330°}\end{aligned}$$

4. Dans cette question, on s'intéresse à l'abaissement de température (en degré Celsius) du four au cours d'une heure, soit entre deux instants t et $(t+1)$. Cet abaissement est donné par la fonction d définie, pour tout nombre réel t positif, par : $d(t) = f(t) - f(t+1)$.

4. a. Vérifier que pour tout nombre réel t positif : $d(t) = 980\left(1 - e^{-\frac{1}{5}}\right)e^{-\frac{t}{5}}$.

Pour tout nombre réel t positif :

$$\begin{aligned} d(t) &= f(t) - f(t+1) \\ &= 980e^{-\frac{t}{5}} + 20 - 980e^{-\frac{t+1}{5}} - 20 \\ &= 980e^{-\frac{t}{5}} - 980e^{-\frac{t}{5}} \times e^{-\frac{1}{5}} \\ &= \underline{980e^{-\frac{t}{5}}\left(1 - e^{-\frac{1}{5}}\right)} \end{aligned}$$

4. b. Déterminer la limite de $d(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Quelle interprétation peut-on en donner ?

Propriété 2 (Limites liées à la fonction exponentielle)

- (1) limites usuelles :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{cases}$$

- (2) croissances comparées :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0 \end{cases}$$

- (3) (nombre dérivé en 0) :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} -\dfrac{t}{5} = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{t\to+\infty} 980e^{-\frac{t}{5}} = 0 \Longrightarrow \lim_{t\to+\infty} 980e^{-\frac{t}{5}}\left(1 - e^{-\frac{1}{5}}\right) = 0$$

Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} d(t) = 0$. Cela signifie que l'écart de température entre deux instants séparés d'une heure devient de plus en plus proche de 0 et donc, qu'au bout d'un certain temps, la température du four se stabilise.

Exercice 2. Complexes — 4 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$*. Les points A, B et C ont pour affixes respectives* $a=-4$*,* $b=2$ *et* $c=4$*.*

1. **A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a'=\mathrm{j}a$, $b'=\mathrm{j}b$ et $c'=\mathrm{j}c$ où j est le nombre complexe $-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.**

1. a. Donner les formes trigonométrique et exponentielle de j. En déduire celles de a', b' et c'.

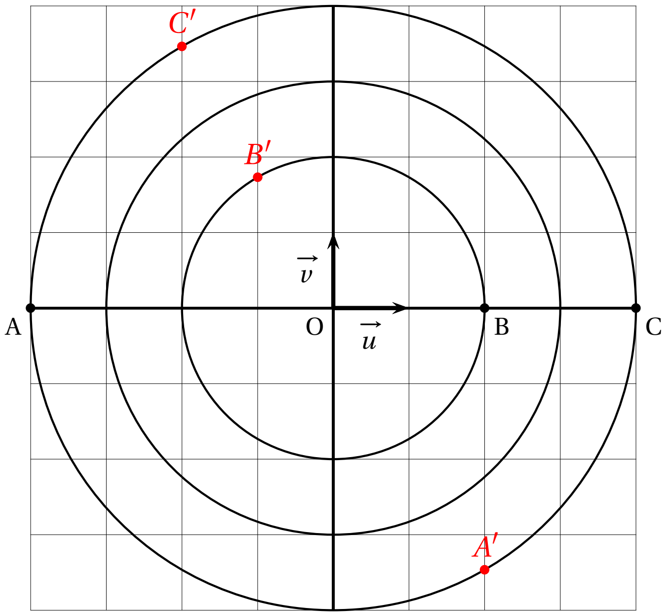
- On a $|j|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$ donc $\begin{cases}\cos\theta=-\frac{1}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$:

$$\boxed{j=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}}$$

- On obtient donc :

$$\begin{cases}a'=\mathrm{j}a=-4\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\boxed{2-2\mathrm{i}\sqrt{3}}=-4\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}=4\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3+\mathrm{i}\pi}=\boxed{4\,\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/3}}\\ b'=\mathrm{j}b=2\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\boxed{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}}\\ c'=\mathrm{j}c=4\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\boxed{-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}=4\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}}\end{cases}$$

1. b. Les points A, B et C ainsi que les cercles de centre O et de rayon 2, 3 et 4 sont représentés sur le graphique fourni en Annexe. Placer les points A′, B′ et C′ sur ce graphique.



2. **Montrer que les points A′, B′ et C′ sont alignés.**

Un argument de $\frac{b'-a'}{c'-a'}$ est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{A'C'}\ ;\ \overrightarrow{A'B'}\right)$. Or on a :

$$\frac{b'-a'}{c'-a'}=\frac{2j+4j}{4j-(-4j)}=\frac{6j}{8j}=\frac{3}{4}$$

Donc l'angle $\left(\overrightarrow{A'C'}\ ;\ \overrightarrow{A'B'}\right)$ est de mesure nulle puisque un argument de $\frac{3}{4}$ est 0 (modulo 2π).
Les points A′, B′ et C′ sont alignés.

3. On note M le milieu du segment [A′C], N le milieu du segment [C′C] et P le milieu du segment [C′A]. Démontrer que le triangle MNP est isocèle.

Calculons les affixes des milieux des segments :

$$\begin{aligned} Z_M &= \frac{c+a'}{2} \\ &= \frac{4-4j}{2} \\ &= 2-2j \\ &= 2+1-\mathrm{i}\sqrt{3} \\ &= 3-\mathrm{i}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Donc $M\left(3-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$

$$\begin{aligned} Z_N &= \frac{c+c'}{2} \\ &= \frac{4+4j}{2} \\ &= 2+2j \\ &= 2-1+\mathrm{i}\sqrt{3} \\ &= 1+\mathrm{i}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Donc $N\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$

$$\begin{aligned} Z_P &= \frac{c'+a}{2} \\ &= \frac{4j-4}{2} \\ &= 2j-2 \\ &= -1+\mathrm{i}\sqrt{3}-2 \\ &= -3+\mathrm{i}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Donc $P\left(-3+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$

On est dans un repère orthonormé donc le calcul des distances est légitime avec les formules usuelles :

$$\begin{cases} MN = |z_N - z_M| = \left|1+\mathrm{i}\sqrt{3}-(3-\mathrm{i}\sqrt{3})\right| = \left|-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2} = 4 \\ PN = |z_N - z_P| = \left|1+\mathrm{i}\sqrt{3}-(-3+\mathrm{i}\sqrt{3})\right| = |4| = 4 \end{cases}$$

Le triangle <u>MNP est isocèle en N</u>.

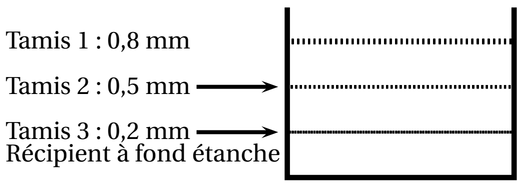
Exercice 3. Probabilités 5 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Une entreprise conditionne du sucre blanc provenant de deux exploitations U et V en paquets de 1 kg et de différentes qualités. Le sucre extra fin est conditionné séparément dans des paquets portant le label « extra fin . Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

Partie A

Pour calibrer le sucre en fonction de la taille de ses cristaux, on le fait passer au travers d'une série de trois tamis positionnés les uns au-dessus des autres et posés sur un récipient à fond étanche. Les ouvertures des mailles sont les suivantes :



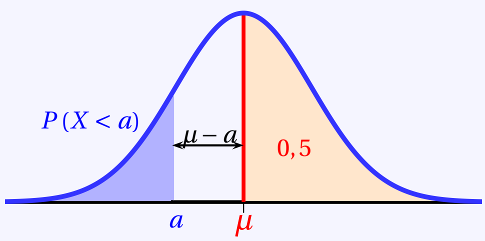
Les cristaux de sucre dont la taille est inférieure à 0,2 mm se trouvent dans le récipient à fond étanche à la fin du calibrage. Ils seront conditionnés dans des paquets portant le label « sucre extra fin ».

1. On prélève au hasard un cristal de sucre de l'exploitation U. La taille de ce cristal, exprimée en millimètre, est modélisée par la variable aléatoire X_U qui suit la loi normale de moyenne $\mu_U = 0,58$ mm et d'écart type $\sigma_U = 0,21$ mm.

1. a. Calculer les probabilités des évènements suivants : $X_U < 0,2$ et $0,5 \leqslant X_U < 0,8$.

- Calculons $P(X_U < 0,2)$.

> **Propriété 3** $(P(X<a) \ ; \ a<\mu)$
>
> Si la variable X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu \ ; \sigma^2)$ alors :
>
> $$P(X<\mu) = 0,5 = P(X>\mu)$$
>
> De plus pour tout réel a avec $a<\mu$:
>
> $$\boxed{P(X<a) = 0,5 - P(a<X<\mu)}$$



La variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance $\mu = 0.58$ et d'écart-type $\sigma = 0.21$. La calculatrice donne à 10^{-3} près :

$$X \sim \mathcal{N}(0.58 \ ; 0.21^2) \Longrightarrow P(0.2<X<0.58) \approx \underline{0,465}$$

> *Calculatrices*
>
> - *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.normFDR*$(0.2 \ , \ 0.58 \ , \ 0.58 \ , \ 0.21) \approx \underline{0,464\,815}$
> - *Sur TI82/83+ : normalcdf*$(0.2 \ , \ 0.58 \ , \ 0.58 \ , \ 0.21)$ *ou (fr.) normalfrép*$(0.2 \ , \ 0.58 \ , \ 0.58 \ , \ 0.21)$
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd* $\Rightarrow$ *NormCD*$(0.2 \ , \ 0.58, \ 0.21 \ , \ 0.58 \ )$

On a donc d'après la propriété :

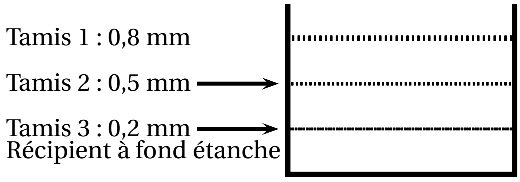
$$P(X_U < 0,2) = 0,5 - P(0,2 \leq X_U < 0,58) \approx \underline{0.035}$$

- Calculons $P(0,5 \leqslant X_U < 0,8)$.
La variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance $\mu = 0.58$ et d'écart-type $\sigma = 0.21$. La calculatrice donne à 10^{-3} près :

$$X \sim \mathcal{N}(0.58 \ ; 0.21^2) \Longrightarrow P(0.5<X<0.8) \approx \underline{0,501}$$

> *Calculatrices*
>
> - *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.normFDR*$(0.5 \ , \ 0.8 \ , \ 0.58 \ , \ 0.21) \approx \underline{0,500\,974}$
> - *Sur TI82/83+ : normalcdf*$(0.5 \ , \ 0.8 \ , \ 0.58 \ , \ 0.21)$ *ou (fr.) normalfrép*$(0.5 \ , \ 0.8 \ , \ 0.58 \ , \ 0.21)$
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd* $\Rightarrow$ *NormCD*$(0.5 \ , \ 0.8, \ 0.21 \ , \ 0.58 \ )$

1. b. On fait passer 1 800 grammes de sucre provenant de l'exploitation U au travers de la série de tamis. Déduire de la question précédente une estimation de la masse de sucre récupérée dans le récipient à fond étanche et une estimation de la masse de sucre récupérée dans le tamis 2.



- Dans le Tamis 2 : Dans le tamis 2 on récupère les cristaux de sucre dont la taille est comprise entre 0,5 et 0,8 mm. D'après la question précédente on obtient :

$$P(0{,}5 \leqslant X_{\mathrm{U}} < 0{,}8) \times 1800 \approx 0{,}501 \times 1800 \approx 901{,}8$$

  On peut donc estimer récupérer 901,8 g de sucre dans le tamis 2.

- Dans le récipient à fond étanche : Dans le récipient à fond étanche on récupère les cristaux de sucre dont la taille est inférieure à 0,2 mm . D'après la question précédente on obtient :

$$P(X_{\mathrm{U}} \leq 0{,}2) \times 1800 \approx 0{,}035 \times 1800 \approx 63$$

  On peut donc estimer récupérer 63 g de sucre dans le récipient à fond étanche.

2. On prélève au hasard un cristal de sucre de l'exploitation V. La taille de ce cristal, exprimée en millimètre, est modélisée par la variable aléatoire X_{V} qui suit la loi normale de moyenne $\mu_{\mathrm{V}} = 0{,}65$ mm et d'écart type σ_{V} à déterminer. Lors du calibrage d'une grande quantité de cristaux de sucre provenant de l'exploitation V, on constate que 40 % de ces cristaux se retrouvent dans le tamis 2. Quelle est la valeur de l'écart type σ_{V} de la variable aléatoire X_{V} ?

Propriété 4

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif.
La variable aléatoire X_{V} suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma_V^2\right)$ si et seulement si, la variable aléatoire $Z = \dfrac{X_{\mathrm{V}} - \mu}{\sigma_V}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

Donc ici, puisque X_{V} suit la loi normale $\mathcal{N}\left(0.65\,;\,\sigma_V^2\right)$, la v.a. $Z = \dfrac{X_{\mathrm{V}} - 0.65}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.
On cherche ici une valeur approchée à 10^{-3} de σ_V sachant que $P(0.5 \leqslant X_{\mathrm{V}} \leqslant 0.8) = 0.4$, or :

$$\begin{aligned} P(0.5 \leqslant X_{\mathrm{V}} \leqslant 0.8) = 0.4 &\iff P\left(\frac{0.5-0.65}{\sigma_V} \leqslant \frac{X_{\mathrm{V}}-0.65}{\sigma_V} \leqslant \frac{0.8-0.65}{\sigma_V}\right) = 0.4 \\ &\iff P\left(\frac{-0{,}15}{\sigma_V} \leqslant Z \leqslant \frac{0{,}15}{\sigma_V}\right) = 0.4 \end{aligned}$$

Or la v.a. Z suit la loi normale centrée réduite et on rappelle que :

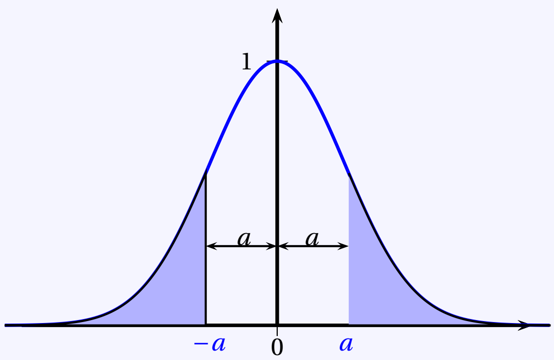
Propriété 5

Soit Z une v.a. qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

2. a. La fonction Φ est définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(t) = P(Z \leq t)$.

2. b. Pour tout réel a on a :

- (1) : $P(Z \leq -a) = P(Z \geq a)$
- (2) : $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$
- (3) : $P(-a \leq Z \leq a) = 2\Phi(a) - 1$



De ce fait en appliquant la relation (3) de la propriété 5 :

$$\begin{aligned}
P(0.5 \leqslant X_V \leqslant 0.8) = 0.4 &\iff P\left(\frac{-0,15}{\sigma_V} \leqslant Z \leqslant \frac{0,15}{\sigma_V}\right) = 0.4 \\
&\iff 2\Phi\left(\frac{0,15}{\sigma_V}\right) - 1 = 0.4 \\
&\iff \Phi\left(\frac{0,15}{\sigma_V}\right) = \frac{0.4+1}{2} = 0,7 \\
&\iff P\left(Z \leq \frac{0,15}{\sigma_V}\right) = 0,7
\end{aligned}$$

La calculatrice nous donne alors avec la fonction répartition normale réciproque :

$$Z \sim \mathcal{N}(0\,;\,1) \Longrightarrow \frac{0,15}{\sigma_V} \approx 0,524\,401$$

Soit arrondi à 10^{-3} près :

$$\boxed{\sigma_V \approx 0,286}$$

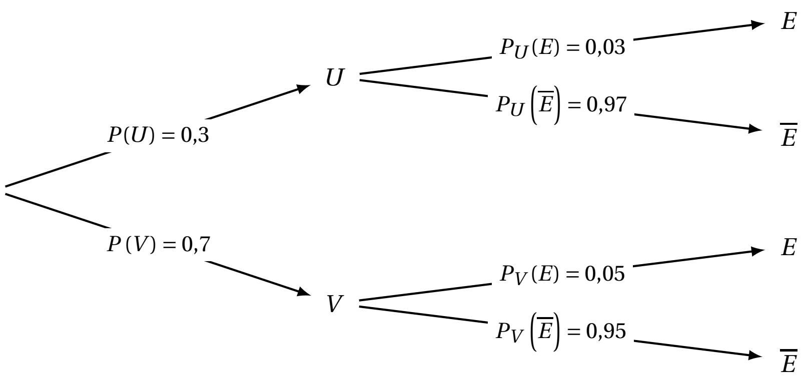
> *Calculatrices*
>
> - *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.invNorm*$(0,7\ ,\ 0\ ,\ 1) \approx \underline{0,524\,401}$
> - *Sur TI82/83+ : invNorm*$(0,7\ ,\ 0\ ,\ 1)$ *ou (fr.) FracNormale*$(0,7\ ,\ 0\ ,\ 1)$
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/InvN* $\Rightarrow$ *InvNormCD*$(0,7\ ,\ 1\ ,\ 0)$

Partie B

Dans cette partie, on admet que 3 % du sucre provenant de l'exploitation U est extra fin et que 5 % du sucre provenant de l'exploitation V est extra fin. On prélève au hasard un paquet de sucre dans la production de l'entreprise et, dans un souci de traçabilité, on s'intéresse à la provenance de ce paquet. On considère les évènements suivants : U : « Le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation U » ; V : « Le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation V » ;E : « Le paquet porte le label "extra fin" ».

1. Dans cette question, on admet que l'entreprise fabrique 30 % de ses paquets avec du sucre provenant de l'exploitation U et les autres avec du sucre provenant de l'exploitation V, sans mélanger les sucres des deux exploitations.

1. a. Quelle est la probabilité que le paquet prélevé porte le label « extra fin » ?



On cherche la probabilité de l'évènement E.
Les évènements U et V formant une partition de l'univers, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
&P(E) = P(E \cap U) + P(E \cap V) \\
&P(E) = P(U) \times P_U(E) + P(V) \times P_V(E) \\
&P(E) = 0,3 \times 0,03 + 0,7 \times 0,05 \\
&P(E) = 0,009 + 0,035 \\
&P(E) = \underline{0,044}
\end{aligned}$$

La probabilité que le paquet prélevé porte le label « extra fin » est 0,044.

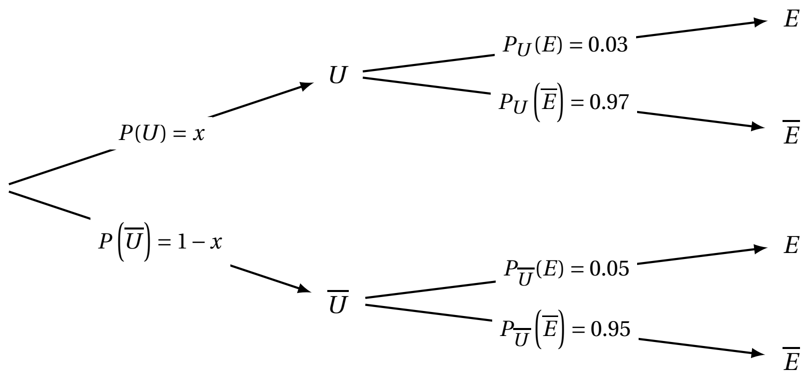
©ISSN 2272-5318

1. b. Sachant qu'un paquet porte le label « extra fin », quelle est la probabilité que le sucre qu'il contient provienne de l'exploitation U ?

La probabilité cherchée est $P_E(U)$.

$$P_E(U) = \frac{P(E \cap U)}{P(E)} = \frac{0,3 \times 0,03}{0,044} = \underline{0,205}$$

2. L'entreprise souhaite modifier son approvisionnement auprès des deux exploitations afin que parmi les paquets portant le label « extra fin », 30 % d'entre eux contiennent du sucre provenant de l'exploitation U. Comment doit-elle s'approvisionner auprès des exploitations U et V ? Toute trace de recherche sera valorisée dans cette question.



On cherche x pour que $P_E(U) = 0,3$. Or on a :

$$P_E(U) = 0,3 \iff \frac{P(E \cap U)}{P(E)} = 0,3 \iff \frac{0,03x}{P(E)} = 0,3$$

Par ailleurs, d'après la formule des probabilités totales on a :

$$P(E) = P(U \cap E) + P(V \cap E) = 0,03x + (1-x)0,05 = 0,05 - 0,02x$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}\frac{0,03x}{P(E)} = 0,3 \iff \frac{0,03x}{0,05-0,02x} = 0,3 &\iff \begin{cases} 0,05 - 0,02x \neq 0 \\ 0,3(0,05-0,02x) = 0,03x \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \neq 2,5 \\ 0,036x = 0,015 \end{cases} \\ &\iff x = \frac{0,015}{0,036} = \frac{5}{12} \approx \underline{0,417}\end{aligned}$$

Il faut donc que l'entreprise fabrique $\frac{5}{12}$ de ses paquets avec du sucre provenant de l'exploitation U et les autres avec du sucre provenant de l'exploitation V.

Partie C

1. **L'entreprise annonce que 30 % des paquets de sucre portant le label «extra fin» qu'elle conditionne contiennent du sucre provenant de l'exploitation U. Avant de valider une commande, un acheteur veut vérifier cette proportion annoncée. Il prélève 150 paquets pris au hasard dans la production de paquets labellisés « extra fin » de l'entreprise. Parmi ces paquets, 30 contiennent du sucre provenant de l'exploitation U. A-t-il des raisons de remettre en question l'annonce de l'entreprise?**

- **Analyse des données** :
  - « Sur un échantillon de $n = 150$ des paquets de sucre . Il est constaté que 30 d'entre eux sont «extra fin». ». Donc la fréquence observée des paquets de sucre «extra fin» est
  $$f = 30 \div 150 = 0,2 \text{ soit } \underline{f = 0,2}$$
  - On veut tester l'hypothèse : « la proportion de des paquets de sucre «extra fin» est $\underline{p = 30\%}$ ».
- **Intervalle de fluctuation** :

Théorème 1 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & np \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est si p désigne la proportion de ce caractère dans la population :

$$I_n = \left[p - 1,96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \ ; \ p + 1,96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

On a pour le cas étudié, $n = 150$, $p = 30$ %. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 150 \geq 30 \\ \checkmark & np = 150 \times 0,3 = 45 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 150 \times 0,7 = 105 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% est alors :

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \ ; \ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,3 - 1,96\,\frac{\sqrt{0,3 \times 0,7}}{\sqrt{150}} \ ; \ 0,3 + 1,96\,\frac{\sqrt{0,3 \times 0,7}}{\sqrt{150}} \right]$$

Soit puisque les borne sont :

- $p - 1,96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,22666$. On arrondit la borne inférieure par défaut à 10^{-3} près soit $\underline{0,226}$.
- $p + 1,96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,37334$. On arrondit la borne supérieure par excès à 10^{-3} près soit $\underline{0,374}$.

$$\boxed{I_{150} \approx [0,226 \ ; \ 0,374]}$$

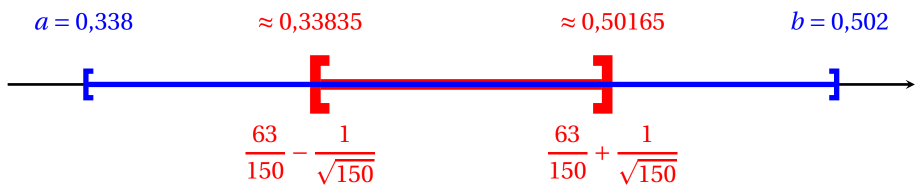
- **Conclusion**
  La fréquence observée n'appartient pas à l'intervalle, $f = 0,2 \notin I$ donc le résultat du contrôle remet en question l'hypothèse, au seuil de 95%.

2. L'année suivante, l'entreprise déclare avoir modifié sa production. L'acheteur souhaite estimer la nouvelle proportion de paquets de sucre provenant de l'exploitation U parmi les paquets portant le label « extra fin ». Il prélève 150 paquets pris au hasard dans la production de paquets labellisés « extra fin » de l'entreprise. Parmi ces paquets 42 % contiennent du sucre provenant de l'exploitation U. Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 %, de la nouvelle proportion de paquets labellisés « extra fin » contenant du sucre provenant de l'exploitation U.

- **Analyse des données** :
  - « *Sur un échantillon de* $n = 150$ *paquets de sucre. Il est constaté que* 63 *sont « extra fin »*. ». Donc la fréquence observée de paquets de sucre « extra fin » est
  $$f = 63 \div 150 = 0{,}42 \text{ soit } f = \underline{0{,}42}$$
  - On a affirme que $\underline{p = 3\%}$ des paquets de sucre sont « extra fin ».
- **Intervalle de confiance** :
  On a pour le cas étudié, $n = 150$, $f = 0{,}42$. Vérifions les conditions d'application du théorème :
  $$\begin{cases} \checkmark & n = 150 \geq 30 \\ \checkmark & nf = 150 \times \dfrac{63}{150} = 63 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-f) = 150 \times \dfrac{87}{150} = 87 \geq 5 \end{cases}$$
  Un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% de la proportion p est alors :
  $$I_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[\frac{63}{150} - \frac{1}{\sqrt{150}}\ ;\ \frac{63}{150} + \frac{1}{\sqrt{150}}\right]$$
  Soit puisque les borne sont :
  - $f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{63}{150} - \dfrac{1}{\sqrt{150}} \approx 0{,}33835$. On arrondit la borne inférieure par défaut à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}338}$.
  - $f + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{63}{150} + \dfrac{1}{\sqrt{150}} \approx 0{,}50165$. On arrondit la borne supérieure par excès à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}502}$.

  $$\boxed{I_{150} \approx [0{,}338\ ;\ 0{,}502]}$$

- **Conclusion**
  Cet intervalle contient la proportion p des paquets de sucre « extra fin », au niveau de confiance 95% (ou au risque d'erreur de 5%). La proportion des paquets de sucre « extra fin » se situe donc, au niveau de confiance 95%, <u>entre 33.8% et 50.2%</u>.



©ISSN 2272-5318

Exercice 4. Espace 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ *d'unité 1 cm, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives (2; 1; 4),* $(4\,;\,-1\,;\,0)$, $(0\,;\,3\,;\,2)$ *et* $(4\,;\,3\,;\,-2)$.

1. **Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).**

La droite (CD) passant par le point $C\,(0;3;2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{CD}\,(4;0;-4)$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que le vecteur $\overrightarrow{CM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{CD}$. On a alors :

$$(CD) = \left\{ M(x\,;\,y\,;\,z)\,;\, \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x-0 \\ y-3 \\ z-2 \end{pmatrix} = t\,\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \right\}$$

Une représentation paramétrique de la droite (CD) est donc :

$$\boxed{(CD)\ :\ \left\{ \begin{array}{l} x = 4t \\ y = 3 \\ z = -4t + 2 \end{array} \right. \quad , \quad t \in \mathbb{R}}$$

2. **Soit M un point de la droite (CD).**

2. a. Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.

Soit M un point de la droite (CD), il est donc de coordonnées $M\,(4t\,;\,3\,;\,-4t+2)$, avec t réel. On est dans un repère orthonormé donc puisque $B(4\,;\,-1\,;\,0)$ on a :

$$\begin{aligned} BM &= \sqrt{(4t-4)^2+(3+1)^2+(2-4t)^2} \\ &= \sqrt{16t^2-32t+16+16+4-16t+16t^2} \\ BM &= \sqrt{32t^2-48t+36} \end{aligned}$$

La fonction racine carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $x \longmapsto \sqrt{32t^2-48t+36}$ est minimale quand $x \longmapsto 32t^2-48t+36$ l'est aussi.

Le coefficient principal de cette expression du second degré de la forma at^2+bt+c est $a = 32 > 0$.

L'expression possède donc un minimum en

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}$$

Ainsi la distance BM est minimale pour $t = \alpha = \dfrac{3}{4}$ soit $\left\{ \begin{array}{l} x = 4t = 3 \\ y = 3 \\ z = -4t+2 = -1 \end{array} \right.$.

Donc le point correspondant est $\underline{M(3\,;\,3\,;\,-1)}$.

2. b. On note H le point de la droite (CD) ayant pour coordonnées (3 ; 3 ; −1). Vérifier que les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.

$$\left\{ \begin{array}{l} B(4\,;\,-1\,;\,0) \\ H(3\,;\,3\,;\,-1) \\ C(0\,;\,3\,;\,2) \\ D(4\,;\,3\,;\,-2) \end{array} \right| \Longrightarrow \overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = -4+0+4 = 0$$

Les vecteurs sont donc orthogonaux. Par ailleurs les droites (BH) et (CD) ont le point H comme point d'intersection. Elles sont donc bien perpendiculaires.

2. c. Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à 12 cm^2.

D'après ce qui précède, (BH) est la hauteur issue de B dans le triangle BCD puisque (BH) et (CD) sont perpendiculaires en H. L'aire du triangle BCD peut donc s'obtenir par :

$$\mathscr{A}(BCD) = \frac{CD \times BH}{2}$$

On est dans un repère orthonormée, donc en unités de longueurs :

$$\begin{cases} CD = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \\ BH = \sqrt{(-1)^2+4^2+(-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \end{cases}$$

Soit :

$$\mathscr{A}(BCD) = \frac{4\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}}{2} = \underline{12 \text{ cm}^2}$$

3.

3. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

$$\left\{\begin{array}{l} B(4\,;\,-1\,;\,0) \\ C(0\,;\,3\,;\,2) \end{array}\right| \Longrightarrow \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix} . \vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = -2+4-2=0$$

$$\left\{\begin{array}{l} C(0\,;\,3\,;\,2) \\ D(4\,;\,3\,;\,-2) \end{array}\right| \Longrightarrow \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix} . \vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = 8+0-8=0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont non colinéaires puisque par exemple $\overrightarrow{CD}$ présente une coordonnée nulle et pas $\overrightarrow{BC}$. Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BCD). Il est donc normal au plan (BCD).

3. b. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

Propriété 6

Soit vecteur $\vec{u}$ non nul et un point A de l'espace. L'unique plan $\mathscr{P}$ passant par B et de vecteur normal $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{BM} . \vec{u} = 0$.
Dans un repère de l'espace, son équation est alors de la forme :

$$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-x_B\\y-y_B\\z-z_B\end{pmatrix} . \vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow a(x-x_B)+b\left(y-y_B\right)+c(z-z_B)=0$$

Donc d'après la propriété 6 avec $B(4\,;\,-1\,;\,0)$:

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (BCD) \Longleftrightarrow \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-4\\y+1\\z-0\end{pmatrix} . \vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = 0$$

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (BCD) \Longleftrightarrow 2(x-4)+(y+1)+2z=0$$

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (BCD) \Longleftrightarrow 2x+y+2z-7=0$$

$$\boxed{(ABC)\ :\ 2x+y+2z-7=0}$$

3. c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD).

La droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD) est par exemple de vecteur directeur $\vec{n}$.
La droite Δ passant par le point $A(2;1;4)$ et de vecteur directeur $\vec{n}\,(2;1;2)$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $\vec{n}$. On a alors :

$$\Delta = \left\{ M(x\,;\,y\,;\,z)\,;\, \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z-4\end{pmatrix} = k\,\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \quad ,\ k \in \mathbb{R} \right\}$$

Une représentation paramétrique de la droite Δ est donc :

$$\boxed{\Delta\ :\ \begin{cases} x = 2k+2 \\ y = k+1 \\ z = 2k+4 \end{cases} \quad ,\ k \in \mathbb{R}}$$

3. d. Démontrer que le point I, intersection de la droite Δ et du plan (BCD) a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{8}{3}\right)$.

On injecte les coordonnées d'un point de la droite Δ dans l'équation du plan.

$$\begin{cases} x = 2k+2 \\ y = k+1 \\ z = 2k+4 \\ 2x+y+2z-7=0 \end{cases} \Longrightarrow 2(2k+2)+(k+1)+2(2k+4)-7=0$$

$$\Longrightarrow 4k+4+k+1+4k+8-7=0$$
$$\Longrightarrow 9k=-6$$
$$\Longrightarrow k=-\frac{2}{3}$$

On obtient donc les coordonnées du pont d'intersection :

$$\begin{cases} x = 2k+2 = 2\times\left(-\frac{2}{3}\right)+2 = \frac{2}{3} \\ y = \left(-\frac{2}{3}\right)+1 = \frac{1}{3} \\ z = 2\times\left(-\frac{2}{3}\right)+4 = \frac{8}{3} \end{cases} \Longrightarrow \underline{I\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{8}{3}\right)}$$

4. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

D'après ce qui précède, la hauteur du tétraèdre ABCD relative à la face BCD est (AI). On a donc :

$$V = \frac{AI \times \mathscr{A}_{BCD}}{3}$$

Avec

$$AI = \sqrt{\left(\frac{2}{3}-2\right)^2+\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{8}{3}-4\right)^2} = 2\text{ cm}$$

Donc le volume du tétraèdre ABCD est :

$$V = \frac{AI \times \mathscr{A}_{BCD}}{3} = \frac{2\times 12}{3} = \underline{8\text{ cm}^3}$$

Exercice 5. Arithmétique — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

À toute lettre de l'alphabet on associe un nombre entier x compris entre 0 et 25 comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
x	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Le « chiffre de RABIN » est un dispositif de cryptage asymétrique inventé en 1979 par l'informaticien Michael Rabin. Alice veut communiquer de manière sécurisée en utilisant ce cryptosystème. Elle choisit deux nombres premiers distincts p et q. Ce couple de nombres est sa clé privée qu'elle garde secrète. Elle calcule ensuite $n = p \times q$ et elle choisit un nombre entier naturel B tel que $0 \leqslant B \leqslant n-1$. Si Bob veut envoyer un message secret à Alice, il le code lettre par lettre. Le codage d'une lettre représentée par le nombre entier x est le nombre y tel que :

$$y \equiv x(x+B)\ [n] \ \textit{avec}\ 0 \leqslant y \leqslant n.$$

Dans tout l'exercice on prend $p=3$, $q=11$ donc $n = p \times q = 33$ et $B = 13$.

Partie A : Cryptage

Bob veut envoyer le mot « NO » à Alice.

1. **Montrer que Bob code la lettre « N » avec le nombre 8.**

   La lettre « N » correspond à $x = 13$ et donc avec le codage :

$$\begin{cases} y \equiv x(x+B)\ [n] \ \text{avec}\ 0 \leqslant y \leqslant n. \\ p=3 \ \text{ et } \ q=11 \\ n=33 \ \text{ et } \ B=13 \end{cases} \iff y \equiv 13(13+13)\ [33] \ \text{avec}\ 0 \leqslant y \leqslant 33$$

$$\iff y \equiv 338[33]$$

$$\iff y \equiv 8[33]$$

   Bob code la lettre « N » avec le nombre 8.

2. **Déterminer le nombre qui code la lettre « O ».**

   La lettre « O » correspond à $x = 14$ et donc avec le codage :

$$\begin{cases} y \equiv x(x+B)\ [n] \ \text{avec}\ 0 \leqslant y \leqslant n. \\ p=3 \ \text{ et } \ q=11 \\ n=33 \ \text{ et } \ B=13 \end{cases} \iff y \equiv 14(14+13)\ [33] \ \text{avec}\ 0 \leqslant y \leqslant 33$$

$$\iff y \equiv 378[33]$$

$$\iff y \equiv 15[33]$$

   Bob code la lettre « O » avec le nombre 15.

Partie B : Décryptage

Alice a reçu un message crypté qui commence par le nombre 3. Pour décoder ce premier nombre, elle doit déterminer le nombre entier x tel que :

$$x(x+13) \equiv 3\ [33] \ \textit{avec}\ 0 \leqslant x < 26.$$

1. **Montrer que $x(x+13) \equiv 3$ [33] équivaut à $(x+23)^2 \equiv 4$ [33].**

$$\begin{aligned} (x+23)^2 \equiv 4\ [33] &\iff x^2+46x+529 \equiv 4\ [33] \\ &\iff x^2+46x \equiv -525\ [33] \\ &\iff x^2+13x \equiv 3\ [33] \\ &\iff x(x+13) \equiv 3\ [33] \end{aligned}$$

2.

2. a. Montrer que si $(x+23)^2 \equiv 4\ [33]$ alors le système d'équations $\begin{cases} (x+23)^2 & \equiv & 4\ [3] \\ (x+23)^2 & \equiv & 4\ [11] \end{cases}$ est vérifié.

Si $(x+23)^2 \equiv 4\ [33]$ alors il existe un relatif k tel que :

$$(x+23)^2 = 4+33k$$

Or

$$\begin{cases} (x+23)^2 = 4+33k \iff (x+23)^2 = 4+3\times(11k) \equiv 4\ \ [3] \\ (x+23)^2 = 4+33k \iff (x+23)^2 = 4+11\times(3k) \equiv 4\ \ [11] \end{cases}$$

Donc si $(x+23)^2 \equiv 4\ [33]$ alors le système d'équations $\begin{cases} (x+23)^2 & \equiv & 4\ [3] \\ (x+23)^2 & \equiv & 4\ [11] \end{cases}$ est vérifié.

2. b. Réciproquement, montrer que si $\begin{cases} (x+23)^2 & \equiv & 4\ [3] \\ (x+23)^2 & \equiv & 4\ [11] \end{cases}$ alors $(x+23)^2 \equiv 4\ [33]$.

$$\begin{cases} (x+23)^2 & \equiv & 4\ [3] \\ (x+23)^2 & \equiv & 4\ [11] \end{cases} \implies \begin{cases} (x+23)^2 = 4+3k \\ (x+23)^2 = 4+11p \end{cases},k\in\mathbb{Z}, p\in\mathbb{Z}$$
$$\implies 3k = 11p$$

On va alors appliquer le théorème de Gauss.

Théorème 2 (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855)

Soit a, b, c des entiers.

Si $\begin{cases} a \text{ divise le produit } bc \\ \text{et} \\ a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux} \end{cases}$, alors a divise c.

Remarque : Le mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss énonce et prouve ce théorème (sous forme de lemme en fait) en 1801 dans son ouvrage « *Disquisitiones arithmeticae* ».

$$\begin{cases} 3k = 11p \\ 3 \text{ divise } 11p \\ 3 \text{ premier avec } 11 \end{cases} \implies 3 \text{ divise } p$$

De ce fait il existe un entier q tel que $p = 3q$ donc :

$$(x+23)^2 = 4+11p = 4+11\times 3q = 4+33q \equiv 4\ \ [33]$$

Donc si $\begin{cases} (x+23)^2 & \equiv & 4\ [3] \\ (x+23)^2 & \equiv & 4\ [11] \end{cases}$ alors $\underline{(x+23)^2 \equiv 4\ [33]}$.

2. c. En déduire que $x(x+13) \equiv 3\ [33] \iff \begin{cases} (x+23)^2 & \equiv & 1\ [3] \\ (x+23)^2 & \equiv & 4\ [11] \end{cases}$

Donc :

$$\begin{aligned} x(x+13) \equiv 3\ \ [33] &\iff (x+23)^2 \equiv 4\ \ [33] \\ &\iff \begin{cases} (x+23)^2 \equiv 4\ \ [3] \\ (x+23)^2 \equiv 4\ \ [11] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (x+23)^2 \equiv 1\ \ [3] \\ (x+23)^2 \equiv 4\ \ [11] \end{cases} \end{aligned}$$

3.

3. a. Déterminer les nombres entiers naturels a tels que $0 \leqslant a < 3$ et $a^2 \equiv 1$ [3].

- Pour $a = 0$, on a : $a^2 = 0^2 \equiv 0 \quad [3]$;
- Pour $a = 1$, on a : $a^2 = 1^2 \equiv 1 \quad [3]$;
- Pour $a = 2$, on a : $a^2 = 2^2 \equiv 1 \quad [3]$;

Les entiers naturels vérifiant $0 \leqslant a < 3$ et $a^2 \equiv 1$ [3] sont 1 et 2.

3. b. Déterminer les nombres entiers naturels b tels que $0 \leqslant b < 11$ et $b^2 \equiv 4$ [11].

- Pour $b = 0$, on a : $b^2 = 0^2 \equiv 0 \quad [11]$;
- Pour $b = 1$, on a : $b^2 = 1^2 \equiv 1 \quad [11]$;
- Pour $b = 2$, on a : $b^2 = 2^2 \equiv 4 \quad [11]$;
- Pour $b = 3$, on a : $b^2 = 3^2 \equiv 9 \quad [11]$;
- Pour $b = 4$, on a : $b^2 = 16 \equiv 5 \quad [11]$;
- Pour $b = 5$, on a : $b^2 = 25 \equiv 3 \quad [11]$;
- Pour $b = 6$, on a : $b^2 = 36 \equiv 3 \quad [11]$;
- Pour $b = 7$, on a : $b^2 = 49 \equiv 5 \quad [11]$;
- Pour $b = 8$, on a : $b^2 = 64 \equiv 9 \quad [11]$;
- Pour $b = 9$, on a : $b^2 = 81 \equiv 4 \quad [11]$;
- Pour $b = 10$, on a : $b^2 = 100 \equiv 1 \quad [11]$.

Les nombres entiers naturels b tels que $0 \leqslant b < 11$ et $b^2 \equiv 4$ [11] sont 2 et 9.

4.

4. a. En déduire que $x(x+13) \equiv 3 \quad [33]$ équivaut aux quatre systèmes suivants :

$$\begin{cases} x \equiv 2 & [3] \\ x \equiv 8 & [11] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \equiv 0 & [3] \\ x \equiv 1 & [11] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \equiv 2 & [3] \\ x \equiv 1 & [11] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \equiv 0 & [3] \\ x \equiv 8 & [11] \end{cases}$$

D'après ce qui précède, $x(x+13) \equiv 3 \quad [33]$ équivaut à :

$$\begin{aligned}
x(x+13) \equiv 3 \quad [33] &\underset{(2°)}{\iff} \begin{cases} (x+23)^2 \equiv 4 \; [3] \\ (x+23)^2 \equiv 4 \; [11] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (x+23)^2 \equiv 1 \; [3] \\ (x+23)^2 \equiv 4 \; [11] \end{cases} \\
&\underset{(3°)}{\iff} \begin{cases} (x+23) \equiv 1 \; [3] \text{ ou } (x+23) \equiv 2 \; [3] \\ (x+23) \equiv 2 \; [11] \text{ ou } (x+23) \equiv 9 \; [11] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \equiv -22 \; [3] \text{ ou } x \equiv -21 \; [3] \\ x \equiv -21 \; [11] \text{ ou } x \equiv -14 \; [11] \end{cases} x(x+13) \equiv 3 \quad [33] \\
&\iff \begin{cases} x \equiv 2 \; [3] \text{ ou } x \equiv 0 \; [3] \\ x \equiv 1 \; [11] \text{ ou } x \equiv 8 \; [11] \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc on vient de montrer que $x(x+13) \equiv 3 \quad [33]$ équivaut aux quatre systèmes suivants :

$$\begin{cases} x \equiv 2 & [3] \\ x \equiv 8 & [11] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \equiv 0 & [3] \\ x \equiv 1 & [11] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \equiv 2 & [3] \\ x \equiv 1 & [11] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \equiv 0 & [3] \\ x \equiv 8 & [11] \end{cases}$$

4. b. On admet que chacun de ces systèmes admet une unique solution entière x telle que $0 \leqslant x < 33$. Déterminer, sans justification, chacune de ces solutions.

Pour x entier, $0 \leqslant x < 33$:

$$\begin{cases} x \equiv 2 & [3] \\ x \equiv 8 & [11] \end{cases} \Longrightarrow \text{une solution est : } \underline{x = 8} \qquad \begin{cases} x \equiv 2 & [3] \\ x \equiv 1 & [11] \end{cases} \Longrightarrow \text{une solution est : } \underline{x = 23}$$

et

$$\begin{cases} x \equiv 0 & [3] \\ x \equiv 1 & [11] \end{cases} \Longrightarrow \text{une solution est : } \underline{x = 12} \qquad \begin{cases} x \equiv 0 & [3] \\ x \equiv 8 & [11] \end{cases} \Longrightarrow \text{une solution est : } \underline{x = 30}$$

5. Compléter l'algorithme en Annexe pour qu'il affiche les quatre solutions trouvées dans la question précédente.

```
Pour x allant de 0 à 32
   Si le reste de la division de x(x+13) par 33 est égal à 3 alors
      Afficher x
   Fin Si
Fin Pour
```

6. Alice peut-elle connaître la première lettre du message envoyé par Bob ? Le « chiffre de RABIN » est-il utilisable pour décoder un message lettre par lettre ?

Alice a reçu un message crypté qui commence par le nombre 3. Pour décoder ce premier nombre, elle doit déterminer le nombre entier x tel que :

$$x(x+13) \equiv 3 \ [33] \ \text{ avec } \ 0 \leqslant x < 26.$$

On vient de montrer que pour x entier avec $0 \leqslant x < 33$, les solutions de l'équation $x(x+13) \equiv 3 \quad [33]$ sont au nombre de quatre : 8, 12, 23 et 30.

Le « chiffre de RABIN » n'est donc pas utilisable pour décoder un message lettre par lettre.

Fin du devoir