

## 🌀 Correction du Baccalauréat S Antilles-Guyane 19 juin 2018 🌀

### EXERCICE 1

5 points

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

L'exploitant d'une forêt communale décide d'abattre des arbres afin de les vendre, soit aux habitants, soit à des entreprises. On admet que :

- parmi les arbres abattus, 30 % sont des chênes, 50 % sont des sapins et les autres sont des arbres d'essence secondaire (ce qui signifie qu'ils sont de moindre valeur) ;
- 45,9 % des chênes et 80 % des sapins abattus sont vendus aux habitants de la commune ;
- les trois quarts des arbres d'essence secondaire abattus sont vendus à des entreprises.

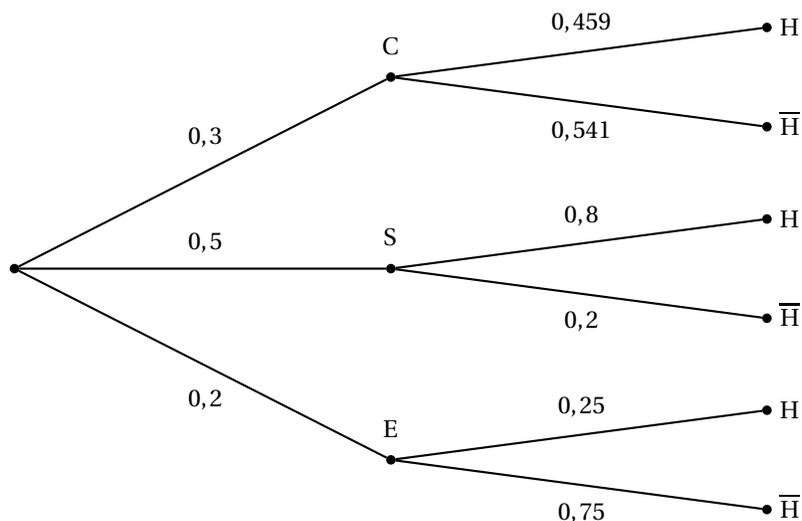
#### Partie A

Parmi les arbres abattus, on en choisit un au hasard.

On considère les événements suivants :

- C : « l'arbre abattu est un chêne » ;
- S : « l'arbre abattu est un sapin » ;
- E : « l'arbre abattu est un arbre d'essence secondaire » ;
- H : « l'arbre abattu est vendu à un habitant de la commune ».

1. Arbre :



2.  $m(C \cap H) = p_C(H) \times p(C) = 0,459 \times 0,3 = 0,1377$ .

La probabilité que l'arbre abattu soit un chêne vendu à un habitant de la commune est 0,1377.

3. On applique la formule de probabilités totales :

$$p(H) = p_C(H) \times p(C) + p_S(H) \times p(S) + p_E(H) \times p(E) = 0,1377 + 0,8 \times 0,5 + 0,25 \times 0,2 = \boxed{0,5877}$$

4.  $p_H(S) = \frac{p(S \cap H)}{p(H)} = \frac{0,4}{0,5877} \approx \boxed{0,681}$  à  $10^{-3}$  près.

#### Partie B

Le nombre d'arbres sur un hectare de cette forêt peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant une loi normale d'espérance  $\mu = 4000$  et d'écart-type  $\sigma = 300$ .

1.  $p(3400 \leq X \leq 4600) = p(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx \boxed{0,954}$ .

2.  $p(X \geq 4500) = 1 - p(X < 4500) \approx 0,048$  arrondi à  $10^{-3}$

### Partie C

L'exploitant affirme que la densité de sapins dans cette forêt communale est de 1 sapin pour 2 arbres.

La proportion théorique de sapins est  $p = 0,5$ .

- La taille de l'échantillon est  $n = 200 \geq 25$ .
- $np = 0,5 \times 200 = 100 \geq 25$
- $n(1 - p) = 100 \geq 25$

Les conditions sont réunies pour qu'on puisse utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95.

$$\text{Cet intervalle est } I_{0,95} = \left[ p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[ 0,5 - 1,96 \frac{0,5}{\sqrt{200}} ; 0,5 + 1,96 \frac{0,5}{\sqrt{200}} \right] \\ \approx [0,430 ; 0,570].$$

La fréquence observée dans cet échantillon est  $f = \frac{106}{200} = 0,53$ ;  $f \in I_{0,95}$ .  
Ce résultat ne remet pas en cause l'affirmation de l'exploitant.

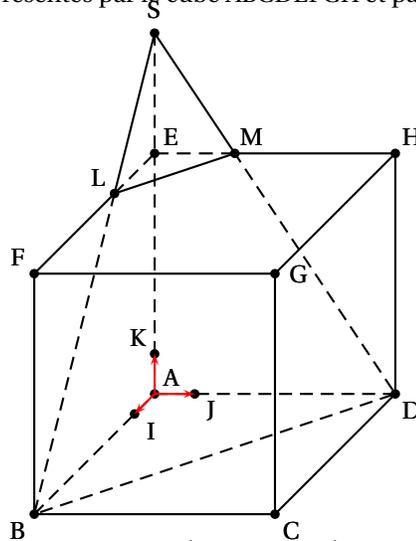
### EXERCICE 2

5 points

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 mètres d'arête.

Ces deux solides sont représentés par le cube ABCDEFGH et par le tétraèdre SELM ci-dessous.



On munit l'espace du repère orthonormé  $(A; \vec{AI}, \vec{AJ}, \vec{AK})$  tel que :  $I \in [AB]$ ,  $J \in [AD]$ ,  $K \in [AE]$  et  $AI = AJ = AK = 1$ , l'unité graphique représentant 1 mètre.

Les points L, M et S sont définis de la façon suivante :

- L est le point tel que  $\vec{FL} = \frac{2}{3} \vec{FE}$  ;
- M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH) ;
- S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK).

1. Les droites (LM) et (BD) sont **coplanaires** (dans le plan (BDS)) et contenues respectivement dans les plans (ABD) et (EFH) qui sont **parallèles**, donc elles sont **parallèles**.

2.  $\vec{AL} = \vec{AE} + \vec{EL} = 6\vec{AK} + \frac{1}{3}\vec{AB} = 6\vec{AK} + 2\vec{AI} = 2\vec{AI} + 0\vec{AJ} + 6\vec{AK}$  donc les coordonnées de L sont  $\boxed{L(2; 0; 6)}$ .

3. a.  $\vec{BL} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$  et B(6; 0; 0).

Un représentation paramétrique de (BL) est alors :

$$(BL) \begin{cases} x = 6 - 4t \\ y = 0 \\ z = 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- b. S appartient au plan (BDL) et à la droite (AE) donc :

$$\begin{cases} x = 6 - 4t \\ y = 0 \\ z = 6t \\ x = y = 0 \end{cases}. \text{ On en déduit } t = \frac{3}{2} \text{ d'où } \boxed{S(0; 0; 9)}.$$

4. Soit  $\vec{n}$  le vecteur de coordonnées  $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

a. •  $\vec{BD} \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$  donc  $\vec{n} \cdot \vec{BD} = 3 \times (-6) + 3 \times 6 + 2 \times 0 = 0$  donc  $\vec{n} \perp \vec{BD}$ .

•  $\vec{BL} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$  donc  $\vec{n} \cdot \vec{BL} = 3 \times (-4) + 3 \times 0 + 2 \times 6 = 0$  donc  $\vec{n} \perp \vec{BL}$ .

- $\vec{n}$  est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan BDL donc est normal à ce plan.

- b. Une équation du plan BDL est alors :  $3(x - x_B) + 3(y - y_B) + 2(z - z_B) = 0$   
 $\Leftrightarrow 3(x - 6) + 3y + 2z = 0 \Leftrightarrow \boxed{3x + 3y + 2z - 18 = 0}$ .

- c. On admet que la droite (EH) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = 6 \end{cases} (s \in \mathbb{R})$$

M est l'intersection du plan (BDL) et de la droite EH donc ses coordonnées vérifient l'équation du plan et la représentation paramétrique de la droite.

$$\text{On doit avoir : } \begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = 6 \\ 3x + 3y + 2z - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = 6 \\ 3x + 12 - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 2 \\ x = 0 \\ y = z \\ z = 6 \end{cases}.$$

M a donc pour coordonnée  $\boxed{M(0; 2; 6)}$ .

5. L'aire du triangle ELM est  $\mathcal{A}(\text{ELM}) = \frac{\text{EL} \times \text{EM}}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$ .

La hauteur SE vaut  $\text{SE} = \text{AS} - \text{AE} = 9 - 6 = 3$ .

Le volume du tétraèdre SELM est alors :  $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times 2 \times 3 = 2 \text{ m}^3$ .

6. L'artiste souhaite que la mesure de l'angle  $\widehat{SLE}$  soit comprise entre  $55^\circ$  et  $60^\circ$ .

Le triangle SLE est rectangle en E :  $\cos(\widehat{SLE}) = \frac{LE}{LS}$ .

$$\text{Or } LS = \sqrt{(x_S - x_E)^2 + (y_S - y_L)^2 + (z_S - z_L)^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}.$$

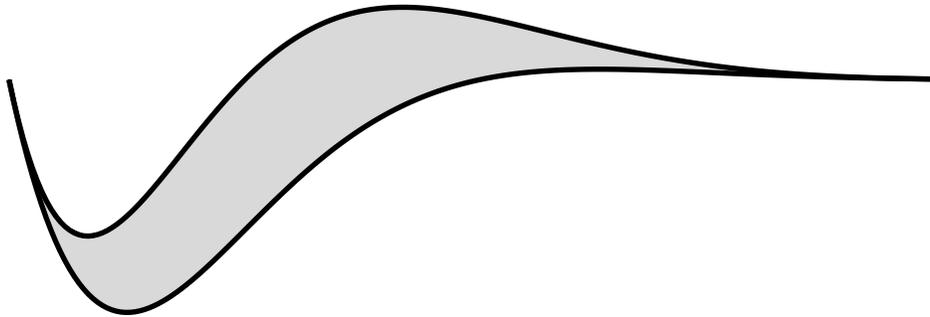
Donc  $\cos(\widehat{SLE}) = \frac{2}{\sqrt{13}}$  ; on en déduit que  $\widehat{SLE} \approx 56,3^\circ$  ; la contrainte est respectée.

### EXERCICE 3

5 POINTS

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \text{ et } g(x) = -e^x \cos x.$$

On admet que les fonctions  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

#### Partie A — Étude de la fonction $f$

$$1. \text{ Pour tout } x \in \mathbb{R} : \begin{cases} -1 \leq -\cos x \leq 1 \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \\ 1 \leq 1 \leq 1 \end{cases} \quad \text{donc par somme : } \boxed{-1 \leq -\cos x + \sin x \leq 3}.$$

Comme  $e^{-x} > 0$ , on en déduit :

$$\boxed{-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}}$$

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$  donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

3.  $f$  est le produit de deux fonctions :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = -e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) + e^{-x}(\sin x + \cos x) = e^{-x}(2\cos x - 1) \text{ donc}$$

$$\boxed{f'(x) = e^{-x}(2\cos x - 1)}$$

4. Dans cette question, on étudie la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-\pi; \pi]$ .

a. Comme  $e^{-x} > 0$   $f'(x)$  est du signe de  $u(x) = 2 \cos x - 1$ .  $u(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3}$  ou

$$x = \frac{\pi}{3}.$$

$$2 \cos x - 1 > 0 \Leftrightarrow \cos x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right[.$$

Signe de  $f'(x)$  :

$x$	$\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\pi$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$+$

b. On en déduit les variations de  $f$  sur  $[-\pi; \pi]$  :

$x$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\pi$
$f(x)$	$2e^\pi$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\pi}{3}}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{3}}$	$2e^{-\pi}$

**Partie B — Aire du logo**

On note  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  les représentations graphiques des fonctions  $f$  et  $g$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . L'unité graphique est de 2 centimètres. Ces deux courbes sont tracées en ANNEXE.

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - g(x) = e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) - (-e^{-x} \cos x) = e^{-x}(\sin x + 1)$ .

Or, pour tout  $x \in \mathbb{R}, \sin x \geq -1$  donc  $\sin x + 1 \geq 0$  donc  $f(x) - g(x) \geq 0$  donc  $f(x) \geq g(x)$ .

La courbe  $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de la courbe  $\mathcal{C}_g$  (avec points communs pour  $\sin x = -1$ , donc pour  $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ).

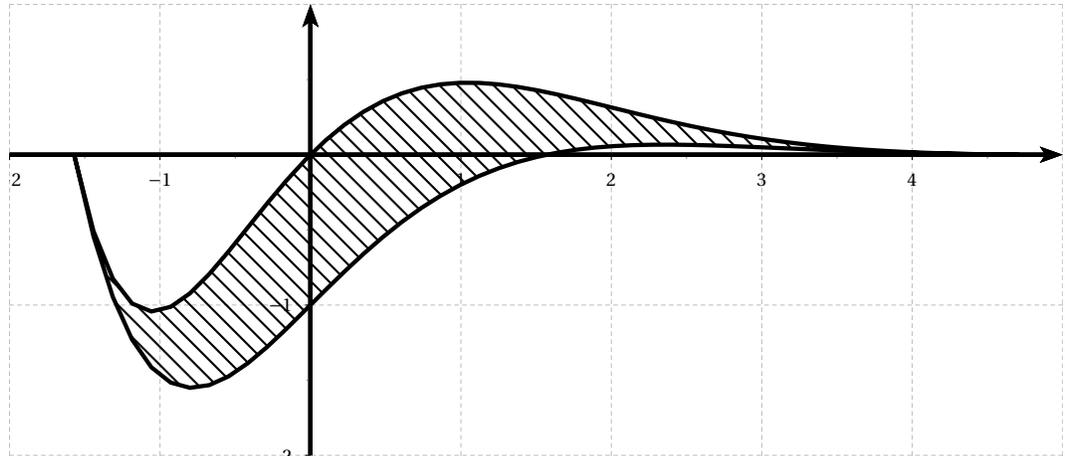
2. Soit  $H$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$H(x) = \left( -\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1 \right) e^{-x}.$$

On admet que  $H$  est une primitive de la fonction  $x \mapsto (\sin x + 1)e^{-x}$  sur  $\mathbb{R}$ .

On note  $\mathcal{D}$  le domaine délimité par la courbe  $\mathcal{C}_f$ , la courbe  $\mathcal{C}_g$  est les droites d'équation  $x = -\frac{\pi}{2}$  et  $x = \frac{3\pi}{2}$ .

a. Hachurons le domaine  $\mathcal{D}$  sur le graphique en annexe à rendre avec la copie.



b. L'aire vaut  $\mathcal{A} = H\left(\frac{3\pi}{2}\right) - H\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{-\frac{1}{2}e^{-\frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}}$ .  
 $\mathcal{A} \approx 2,4$  u.a., donc  $\mathcal{A} \approx 9,6$  cm<sup>2</sup>.

**EXERCICE 4****5 POINTS**

CANDIDATS N'AYANT PAS SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1<sup>er</sup> juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1<sup>er</sup> juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1<sup>er</sup> novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite  $(u_n)$ . Selon ce modèle, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  désigne le nombre de cétacés au 1<sup>er</sup> juin de l'année 2017 +  $n$ . On a donc  $u_0 = 3000$ .

- $u_1 = (u_0 + 80) \times 0,95 = 0,95 \times 3080 = 2926$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = (u_n + 80) \times 0,95 = \boxed{0,95u_n + 76}$ .
- À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite  $(u_n)$ . Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
2	$u_n$	3 000	2 926	2 856	2 789	2 725	2 665	2 608	2 553

En C2, on doit taper « =0.95\*B2+76 »

- Montrons par récurrence que, pour tout  $n$ ,  $u_n \geq 1520$ .
    - Initialisation :  $u_0 = 3000 \geq 1520$  donc la propriété est vraie au rang 0.
    - On suppose que  $u_n \geq 1520$  pour un entier  $n$  quelconque.  
Alors :  $0,95u_n \geq 0,95 \times 1520$  d'où  $0,95u_n + 76 \geq 0,95 \times 1520 + 76 = 1520$  donc la propriété est héréditaire.  
D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout  $n$ .
  - Pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = 0,95u_n + 76 - u_n = -0,05u_n + 76 = -0,05(u_n - 1520) \leq 0$  car on a montré que  $u_n \geq 1520$ .  
La suite  $(u_n)$  est bien décroissante.
  - La suite  $(u_n)$  est décroissante et minée par 1 250, donc convergente.
- On désigne par  $(v_n)$  la suite définie par, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = u_n - 1520$ .
  - Pour tout  $n$ ,  $v_{n+1} = u_{n+1} - 1520 = 0,95u_n + 76 - 1520 = 0,95u_n - 1444 = 0,95(u_n - 1520) = \boxed{0,95v_n}$ .  
La suite  $(v_n)$  est géométrique, de raison  $q = 0,95$  et de premier terme  $v_0 = u_0 - 1520 = 3000 - 1520 = 1480$ .
  - Par conséquent, puisque  $(v_n)$  est géométrique,  $v_n = v_0 q^n = 1480 \times 0,95^n$  donc  $\boxed{u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520}$ .
  - $-1 < 0,95 < 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^n = 0$  d'où  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1520}$ .

6. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

```

n ← 0
u ← 3 000
Tant que u > 2 000
    n ← n+1
    u ← 0.95*u+76
Fin de Tant que

```

7. On a vu que la limite de la suite est 1 520 donc il y a une valeur de la suite pour laquelle  $u_n < 1200$ .  
On trouve  $n = 22$ .

**EXERCICE 4****5 POINTS**

CANDIDATS AYANT SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le droit de pêche dans une réserve marine est réglementé : chaque pêcheur doit posséder une carte d'accréditation annuelle. Il existe deux types de cartes :

- une carte de pêche dite « libre » (entre parenthèse le pêcheur mais pas limité en nombre de poissons pêchés) ;
- une carte de pêche dite « avec quota » (le pêcheur ne doit pas dépasser une certaine quantité hebdomadaire de poisson).

On suppose que le nombre total de pêcheurs reste constant d'année en année.

On note, pour l'année 2017 + n :

- $\ell_n$  la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche libre ;
- $q_n$  la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche avec quota.

On observe que :

- chaque année, 65 % des possesseurs de la carte de pêche libres achète de nouveaux une carte de pêche libre l'année suivante ;
- Chaque année, 45 % des possesseurs de la carte de pêche avec quota achète une carte de pêche libre l'année suivante ;
- En 2017, 40 % des pêcheurs ont acheté une carte de pêche libre. On a donc  $\ell_0 = 0,4$  et  $q_0 = 0,6$ .

On note, pour tout entier naturel  $n$ ,  $P_n = \begin{pmatrix} \ell_n \\ q_n \end{pmatrix}$ .

1. Il est clair que  $P_{n+1} = MP_n$ , où M est la matrice carrée  $\begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix}$ .

2. 2019 correspond à  $n = 2$ .

$$P_2 = M^2 P_0 = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix}^2 \times \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,556 \\ 0,444 \end{pmatrix} \text{ (à la calculatrice).}$$

La proportion de pêcheurs achetant une carte de pêche avec quota en 2019 est donc  $q_2 = 0,444$ .

3. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1 ◦	$M := \{\{0,65,0,45\}, \{0,35,0,55\}\}$ $\checkmark M := \begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix}$	5 ◦	TQ $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2 ◦	$P_0 := \{\{0,4\}, \{0,6\}\}$ $\checkmark P_0 := \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$	6 ◦	QT $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3 ◦	$Q := \{\{9,1\}, \{7,-1\}\}$ $\checkmark Q := \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$	7 ◦	$D := TMQ$ $\rightarrow D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$
4 ◦	$T := \{\{1/16, 1/16\}, \{7/16, -9/16\}\}$ $\checkmark T := \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{pmatrix}$		

a. Le déterminant de Q est  $9 \times (-1) - 7 \times 1 = -16 \neq 0$  donc Q est inversible.

$$\text{Alors } Q^{-1} = \frac{1}{-16} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{pmatrix}$$

$$\text{b. } QDQ^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & \frac{1}{5} \\ 7 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix} = M \text{ donc}$$

$$\boxed{M = QDQ^{-1}}$$

4. On admet que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$M^n = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 9 + 7 \times 0,2^n & 9 - 9 \times 0,2^n \\ 7 - 7 \times 0,2^n & 7 + 9 \times 0,2^n \end{pmatrix}.$$

a. Démontrons par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n = M^n P_0$ .

- Initialisation : Pour  $n = 0$ ,  $M^0 P_0 = P_0$  donc la propriété est vraie au rang 0.
- On suppose que  $P_n = M^n P_0$  pour un entier  $n$  quelconque.  
Alors :  $P_{n+1} = M P_n = M M^n P_0 = M^{n+1} P_0$  donc la propriété est héréditaire.

/a propriété est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang  $n$  elle l'est au rang  $n + 1$ . D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout  $n$ .

$$\text{b. Par conséquent : } M_n = \begin{pmatrix} l_n \\ q_n \end{pmatrix} = M^n P_0 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 9 + 7 \times 0,2^n & 9 - 9 \times 0,2^n \\ 7 - 7 \times 0,2^n & 7 + 9 \times 0,2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On en déduit que } \ell_n = \frac{1}{16} [9 \times 0,4 + 7 \times 0,2^n \times 0,4 + 9 \times 0,6 - 9 \times 0,6 \times 0,2^n] = \frac{1}{16} (9 - 2,6 \times 0,2^n) =$$

$$\boxed{\frac{9}{16} - \frac{13}{16} \times 0,2^n}$$

5. Pour tout  $n$ ,  $\ell_n \leq \frac{9}{16} = 0,5625 = \frac{56,25}{100} = 56,25\%$  donc la proportion de pêcheurs achetant la carte de pêche libre ne dépasse pas 60 %.