Math93.com

Baccalauréat 2018 - S
Correction Antilles/Guyane

Série S Obli. et Spé.

19 juin 2018

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. Probabilités — 5 points

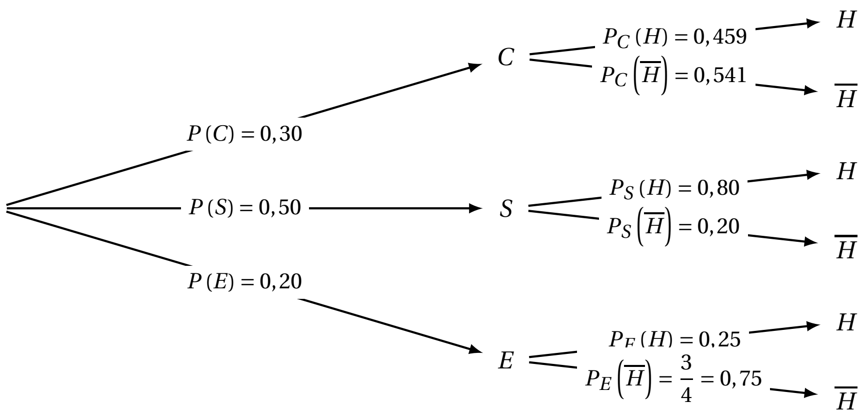
Commun à tous les candidats

L'exploitant d'une forêt communale décide d'abattre des arbres afin de les vendre, soit aux habitants de la commune, soit à des entreprises. On admet que : parmi les arbres abattus, 30% *sont des chênes,* 50% *sont des sapins et les autres sont des arbres d'essence secondaire (ce qui signifie qu'ils sont de moindre valeur) ;* 45,9% *des chênes et* 80% *des sapins abattus sont vendus aux habitants de la commune ; les trois quarts des arbres d'essence secondaire abattus sont vendus à des entreprises.*

Partie A

Parmi les arbres abattus, on en choisit un au hasard. On considère les événements suivants : C : « l'arbre abattu est un chêne » » ; S : « l'arbre abattu est un sapin » ; E : « l'arbre abattu est un arbre d'essence secondaire » ; H :« l'arbre abattu est vendu à un habitant de la commune » .

1. **Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.**



2. **Calculer la probabilité que l'arbre abattu soit un chêne vendu à un habitant de la commune.**
La probabilité que l'arbre abattu soit un chêne vendu à un habitant de la commune est :

$$P(C \cap H) = P_C(H) \times P(C) = 0,3 \times 0,459 = \underline{0,13770}$$

3. **Justifier que la probabilité que l'arbre abattu soit vendu à un habitant de la commune est égale à 0,5877.**
la probabilité que l'arbre abattu soit vendu à un habitant de la commune est $P(H)$. les évènement C, S et E formant une partition de l'univers, d'après la formule de probabilités totales on a :

$$P(H) = P(C \cap H) + P(S \cap H) + P(E \cap H)$$
$$P(H) = 0,13770 + 0,5 \times 0,8 + 0,2 \times 0,25$$
$$P(H) = \underline{0,5877}$$

4. **Quelle est la probabilité qu'un arbre abattu vendu à un habitant de la commune soit un sapin? On donnera le résultat arrondi à 10^{-3}.**
La probabilité qu'un arbre abattu vendu à un habitant de la commune soit un sapin est, arrondi à 10^{-3} :

$$P_H(S) = \frac{P(H \cap S)}{P(H)} = \frac{0,5 \times 0,8}{0,5877} \approx \underline{0,681}$$

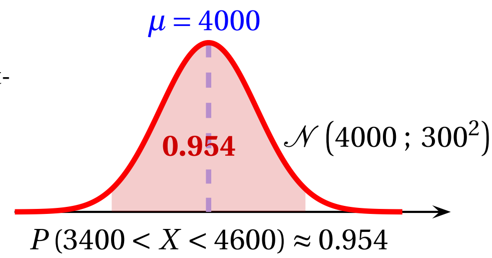
Partie B

Le nombre d'arbres sur un hectare de cette forêt peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant une loi normale d'espérance $\mu = 4000$ et d'écart-type $\sigma = 300$.

1. **Déterminer la probabilité qu'il y ait entre 3 400 et 4 600 arbres sur un hectare donné de cette forêt. On donnera le résultat arrondi à 10^{-3}.**

La variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance $\mu = 4000$ et d'écart-type $\sigma = 300$. La calculatrice nous donne à 10^{-3} près :

$$X \sim \mathcal{N}\left(4000\,;\,300^2\right) \Longrightarrow P(3400 < X < 4600) \approx \underline{0,954}$$



Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.normFDR*$(3400\,,\,4600\,,\,4000\,,\,300) \approx \underline{0,95449974}$
- *Sur TI82/83+ : normalcdf*$(3400\,,\,4600\,,\,4000\,,\,300)$ *ou (fr.) normalfrép*$(3400\,,\,4600\,,\,4000\,,\,300)$
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd* $\Rightarrow$ *NormCD*$(3400\,,\,4600,\,300\,,\,4000\,)$

2. **Calculer la probabilité qu'il y ait plus de 4 500 arbres sur un hectare donné de cette forêt. On donnera le résultat arrondi à 10^{-3}.**

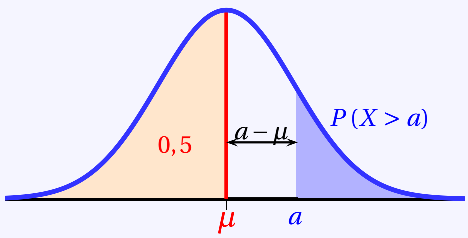
Propriété 1 $(P(X > a)\ ;\ a > \mu)$

Si la variable X suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ alors :

$$P\left(X < \mu\right) = 0,5 = P\left(X > \mu\right)$$

De plus pour tout réel a avec $a > \mu$:

$$\boxed{P(X > a) = 0,5 - P\left(\mu < X < a\right)}$$



La probabilité qu'il y ait plus de 4 500 arbres sur un hectare donné de cette forêt est $P(X > 4500)$. On a ici :

$$P(X > 4500) = 0,5 - P(4000 < X < 4500) \approx \underline{0,048}$$

Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 :* $\left(0,5-\right.$ *TIStat.normFDR*$\left.(4000\,,\,4500\,,\,4000\,,\,300)\right) \approx \underline{0,0477903523}$
- *Sur TI82/83+ : normalcdf*$(4000\,,\,4500\,,\,4000\,,\,300)$ *ou (fr.) normalfrép*$(4000\,,\,4500\,,\,4000\,,\,300)$
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd* $\Rightarrow$ *NormCD*$(4000\,,\,4500,\,300\,,\,4000\,)$

Partie C

L'exploitant affirme que la densité de sapins dans cette forêt communale est de 1 sapin pour 2 arbres. Sur une parcelle, on a compté 106 sapins dans un échantillon de 200 arbres. Ce résultat remet-il en cause l'affirmation de l'exploitant?

- **Analyse des données** :
  - « Sur un échantillon de $n = 200$ arbres. Il est constaté que 106 d'entre eux sont de type sapin. ». Donc la fréquence observée d'arbres de type sapin est
  $$f = 106 \div 200 = 0{,}53 \text{ soit } \underline{f = 0{,}53}$$
  - On veut tester l'hypothèse : « la proportion d' arbres de type sapin est $\underline{p = 50\%}$ ».
- **Intervalle de fluctuation** :

Théorème 1 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & np \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est si p désigne la proportion de ce caractère dans la population :

$$I_n = \left[p - 1{,}96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \; ; \; p + 1{,}96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

On a pour le cas étudié, $n = 200$, $p = 50$ %. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 200 \geq 30 \\ \checkmark & np = 200 \times 0{,}5 = 100 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 200 \times 0{,}5 = 100 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle fluctuation asymptotique au seuil 95% est alors :

$$I_n = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \; ; \; p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[0{,}5 - 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}5 \times 0{,}5}}{\sqrt{200}} \; ; \; 0{,}5 + 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}5 \times 0{,}5}}{\sqrt{200}} \right]$$

Soit puisque les borne sont :

- $p - 1{,}96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}4307$. On arrondit la borne inférieure par défaut à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}43}$.
- $p + 1{,}96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}5693$. On arrondit la borne supérieure par excès à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}57}$.

$$\boxed{I_{200} \approx [0{,}43 \; ; \; 0{,}57]}$$

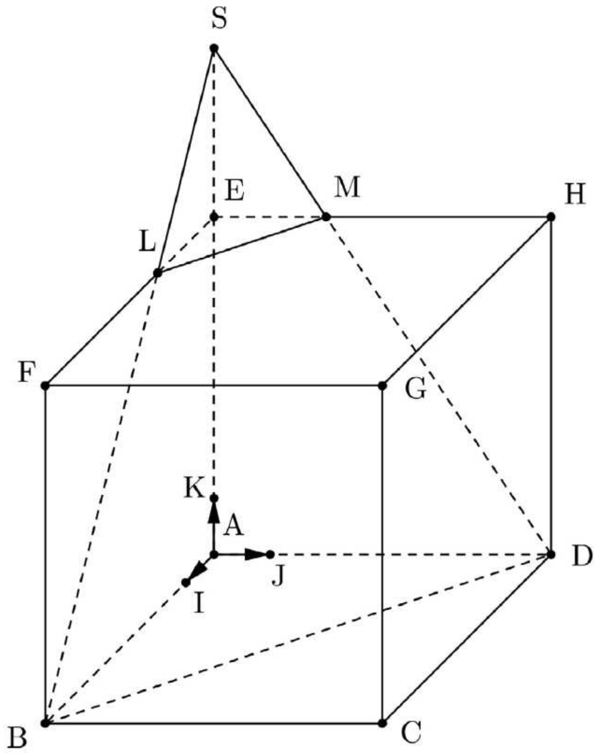
- **Conclusion**
La fréquence observée appartient à l'intervalle, $f = 0{,}53 \in I$ donc le résultat du contrôle ne remet pas en question l'hypothèse, au seuil de 95%.

©ISSN 2272-5318

Exercice 2. Espace — 5 points

Commun à tous les candidats

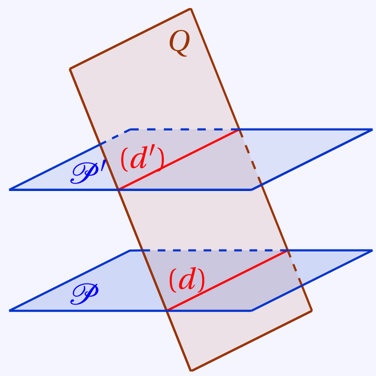
Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 mètres d'arête. Ces deux solides sont représentés par le cube ABCDEFGH et par le tétraèdre SELM ci-dessous.



On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AI}\,;\,\overrightarrow{AJ}\,;\,\overrightarrow{AK}\right)$ *tel que :* $I \in [AB]$, $J \in [AD]$, $K \in [AE]$ *et* $AI = AJ = AK = 1$, *l'unité graphique représentant 1 mètre. Les points L, M et S sont définis de la façon suivante : L est le point tel que* $\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE}$ *; M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH) ; S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK).*

1. Démontrer, sans calcul de coordonnées, que les droites (LM) et (BD) sont parallèles.

> **Théorème 2** (Parallélisme de deux droites)
>
> Si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont strictement parallèles, tout plan $\mathscr{Q}$ qui coupe le plan $\mathscr{P}$, coupe aussi le plan $\mathscr{P}'$ et les droites d'intersection (d) et (d') sont parallèles.

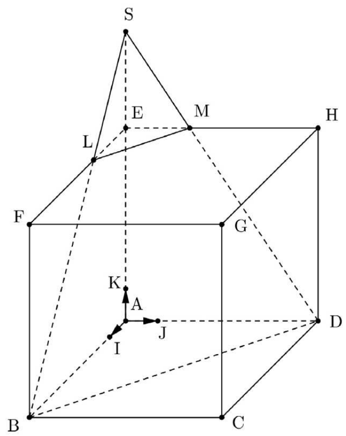


On applique le théorème 2. Les droites (LM) et (BD) sont parallèles car elle sont les intersections du plan (SLM) avec les deux plans parallèles (FGH) et (BCD) .

2. Démontrer que les coordonnées du point L sont $L(2\,;\,0\,;\,6)$.

Dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AI}\,;\,\overrightarrow{AJ}\,;\,\overrightarrow{AK}\right)$ on a $F(6\,;\,0\,;\,6)$ et $E(0\,;\,0\,;\,6)$ puisque le cube ABCDEFGH est un cube de 6 mètres d'arête. Donc en passant aux coordonnées dans l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{FL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{FE}\iff\begin{cases}x_L-6=\dfrac{2}{3}\times(-6)\\[2ex] y_L-0=\dfrac{2}{3}\times 0\\[2ex] z_L-6=\dfrac{2}{3}\times 0\end{cases}\iff\begin{cases}x_L-6=-4\\ y_L=0\\ z_L=6\end{cases}$$



Les coordonnées du point L sont $L(2\,;\,0\,;\,6)$.

3.

3. a. Donner une représentation paramétrique de la droite (BL) .

La droite (BL) passant par le point $B(6;0;0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{BL}\,(-4;0;6)$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que le vecteur $\overrightarrow{BM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{BL}$. On a alors :

$$(BL)=\left\{M(x\,;\,y\,;\,z)\,;\,\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-6\\y-0\\z-0\end{pmatrix}=t\,\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix}\quad,\quad t\in\mathbb{R}\right\}$$

Une représentation paramétrique de la droite (BL) est donc :

$$\boxed{(BL)\;:\;\begin{cases}x=-4t+\;6\\ y=0\\ z=6t\end{cases}\quad,\quad t\in\mathbb{R}}$$

3. b. Vérifier que les coordonnées du point S sont (0; 0; 9).

Dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AI}\,;\,\overrightarrow{AJ}\,;\,\overrightarrow{AK}\right)$ le point S est de coordonnées $S(0;0;z_S)$ car il appartient à la droite (AE). Par ailleurs S appartient à la droite (BL) donc ses coordonnée vérifient :

$$\begin{cases}x_S=-4t+6=0\\ y_S=0\\ z_S=6t\end{cases}\iff\begin{cases}t=\dfrac{3}{2}\\ x_S=0\\ y_S=0\\ z_S=6t\end{cases}\iff\begin{cases}x_S=0\\ y_S=0\\ z_S=9\end{cases}$$

4. *Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées* $(3\,;\,3\,;\,2)$.

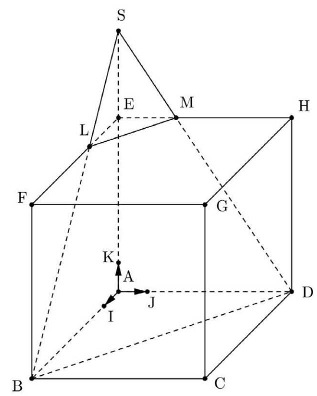
4. a. Vérifier que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BDL).

Théorème 3

Un vecteur $\vec{n}$ est normal à un plan si, et seulement si, il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BL}$ ne sont pas colinéaires et engendrent donc le plan (BDL).

$$\begin{cases} B\,(6\,;\,0\,;\,0) \\ D\,(0\,;\,6\,;\,0) \\ L\,(2\,;\,0\,;\,6) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \vec{n}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix} . \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix} = -18+18+0=0 \\ \vec{n}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix} . \overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix} = -12+0+12=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{BD} = 0 \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{BL} = 0 \end{cases}$$



Donc d'après le théorème 3, le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (BCD) car il est orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BL}$ non colinéaires de ce plan.

4. b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDL) est $3x+3y+2z-18=0$.

Propriété 2

Soit vecteur $\vec{u}$ non nul et un point A de l'espace. L'unique plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\,.\,\vec{u}=0$.
Dans un repère de l'espace, son équation est alors de la forme :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix} . \vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow a\,(x-x_A)+b\left(y-y_A\right)+c\,(z-z_A)=0$$

Donc d'après la propriété 2 :

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (BDL) \Longleftrightarrow \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-6\\y-0\\z-0\end{pmatrix} . \vec{n}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix} = 0$$

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (BDL) \Longleftrightarrow 3(x-6)+3y+2z=0$$

$$\boxed{(BDL)\ :\ 3x+3y+2z-18=0}$$

4. c. On admet que la droite (EH) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x=0 \\ y=s \\ z=6 \end{cases}$, $s\in\mathbb{R}$. Calculer les coordonnées du point M.

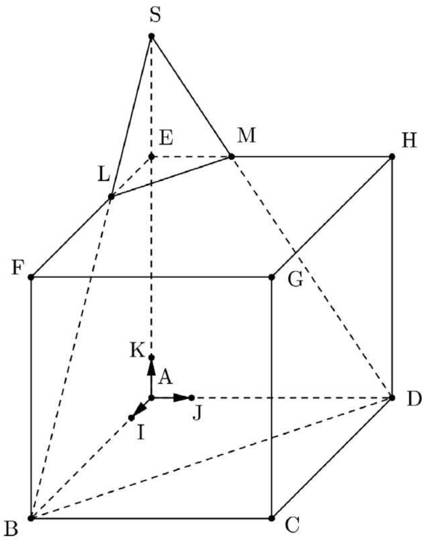
Le point M est le point d'intersection de la droite (EH) et du plan (BDL). Ses coordonnées sont donc solution du système :

$$\begin{cases} x=0 \\ y=s \\ z=6 \\ 3x+3y+2z-18=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=s \\ z=6 \\ 0+3s+12-18=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=s \\ z=6 \\ 3s=6 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} s=2 \\ x=0 \\ y=2 \\ z=6 \end{cases}$$

Le point M a pour coordonnées $\underline{M(0\,;\,2\,;\,6)}$.

5. Calculer le volume du tétraèdre SELM.

$$V=\frac{1}{3}\times\mathscr{A}_{ELM}\times SE$$



- Le triangle ELM est rectangle en E et $\begin{cases}E\,(0\,;\,0\,;\,6)\\ M(0\,;\,2\,;\,6)\\ L\,(2\,;\,0\,;\,6)\end{cases}$

  donc $EM=2=EL$ soit :

$$\mathscr{A}_{ELM}=\frac{EL\times EM}{2}=\frac{2\times 2}{2}=2\text{ u.a.}$$

- Par ailleurs $\begin{cases}S(0\,;\,0\,;\,9)\\ E\,(0\,;\,0\,;\,6)\end{cases}$ donc $ES=$;
- Conclusion :

$$\boxed{V=\frac{1}{3}\times 2\times 3=2\text{ m}^3}$$

6. L'artiste souhaite que la mesure de l'angle $\widehat{SLE}$ soit comprise entre 55° et 60°. Cette contrainte d'angle est-elle respectée ?

On va classiquement calculer le produit scalaire de deux façons.

- D'une part :

$$\begin{cases}L\,(2\,;\,0\,;\,6)\\ S(0\,;\,0\,;\,9)\\ E\,(0\,;\,0\,;\,6)\end{cases}\Longrightarrow \overrightarrow{LS}\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}.\overrightarrow{LE}\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}=4+0+0=4$$

- D'autre part : On est dans un repère orthonormé donc

$$\overrightarrow{LS}\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}\text{ et }\overrightarrow{LE}\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}LS=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}\text{ m}\\ LE=\sqrt{4}=2\text{ m}\end{cases}$$

  et donc

$$\overrightarrow{LS}\,.\,\overrightarrow{LE}=LF\times LE\times\cos\widehat{SLE}=2\sqrt{13}\cos\widehat{SLE}$$

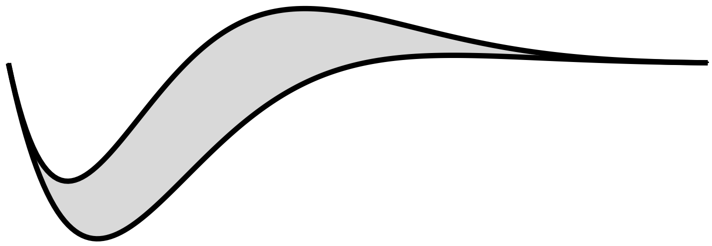
- Conclusion :

$$\begin{cases}\overrightarrow{LS}\,.\,\overrightarrow{LE}=4\\ \overrightarrow{LS}\,.\,\overrightarrow{LE}=2\sqrt{13}\cos\widehat{SLE}\end{cases}\Longrightarrow\cos\widehat{SLE}=\frac{4}{2\sqrt{13}}\Longrightarrow\boxed{\widehat{SLE}=\arccos\left(\frac{4}{2\sqrt{13}}\right)\approx\underline{56,31°}}$$

La contrainte d'angle est respectée car l'artiste souhaite que la mesure de l'angle $\widehat{SLE}$ soit comprise entre 55° et 60°.

Exercice 3. Fonctions — 5 points

Commun à tous les candidats



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1)$ et $g(x) = -e^{x}\cos x$. On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Partie A - Étude de la fonction f

1. **Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3e^{-x}$.**

Pour tout réel x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -1 \le -\cos x \le 1 \\ -1 \le \sin x \le 1 \end{cases} \Longrightarrow -1 \le (-\cos x + \sin x + 1) \le 1$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^{-x} > 0$ donc

$$e^{-x} \le \underbrace{e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1)}_{f(x)} \le e^{-x}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{-e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3e^{-x}}$$

2. **En déduire la limite de f en $+\infty$.**

$$\begin{cases} \lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$$

Donc en passant à la limite dans l'inéquation précédente, par théorème d'encadrement on obtient :

$$\begin{cases} -e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3e^{-x} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$$

3. **Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x}(2\cos x - 1)$ où f' est la fonction dérivée de f.**

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = e^{-x} \times (-\cos x + \sin x + 1) \end{cases}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R} ;\ f(x) = u(x) \times v(x) \ : \ \begin{cases} u(x) = e^{-x} & ; & u'(x) = -e^{-x} \\ v(x) = (-\cos x + \sin x + 1) & ; & v'(x) = (\sin x + \cos x) \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ f'(x) &= -e^{-x} \times (-\cos x + \sin x + 1) + e^{-x} \times (\sin x + \cos x) \\ f'(x) &= e^{-x}(\cos x - \sin x - 1 + \sin x + \cos x) \end{aligned}$$

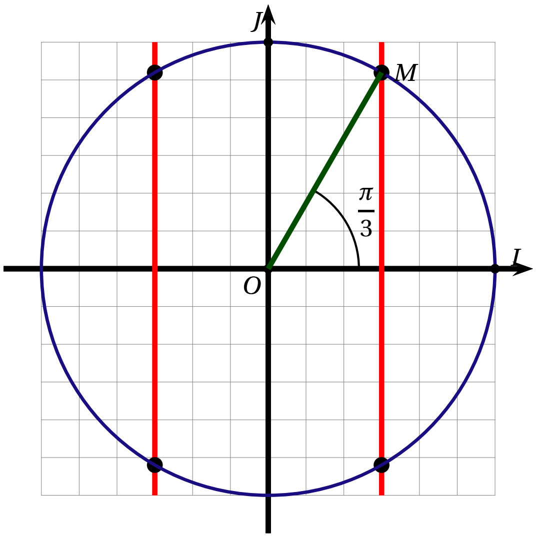
Soit

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} ;\ f'(x) = e^{-x}(2\cos x - 1)}$$

 ©ISSN 2272-5318

4. Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.

4. a. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.



Sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$ on a :

$$2\cos x - 1 \geq 0 \iff \cos x \geq \frac{1}{2} \iff \left[-\frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{\pi}{3}\right]$$

Par ailleurs l'exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, le facteur $\mathrm{e}^{-x} > 0$ et on obtient :

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0 \iff x \in \left[-\frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{\pi}{3}\right] \\ f'(x) \leq 0 \iff x \in \left[-\pi\ ;\ -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}\ ;\ \pi\right] \end{cases}$$

4. b. En déduire les variations de f sur $[-\pi;\pi]$.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	$2\mathrm{e}^{\pi} \approx 46.28$	↘	≈ -1.04	↗	≈ 0.48	↘	$2\mathrm{e}^{-\pi} \approx 0.09$

Partie B - Aire du logo

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est de 2 centimètres. Ces deux courbes sont tracées en ANNEXE.

1. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x de $\mathbb{R}$ on a :

$$f(x) - g(x) = \mathrm{e}^{-x}(\sin x + 1)$$

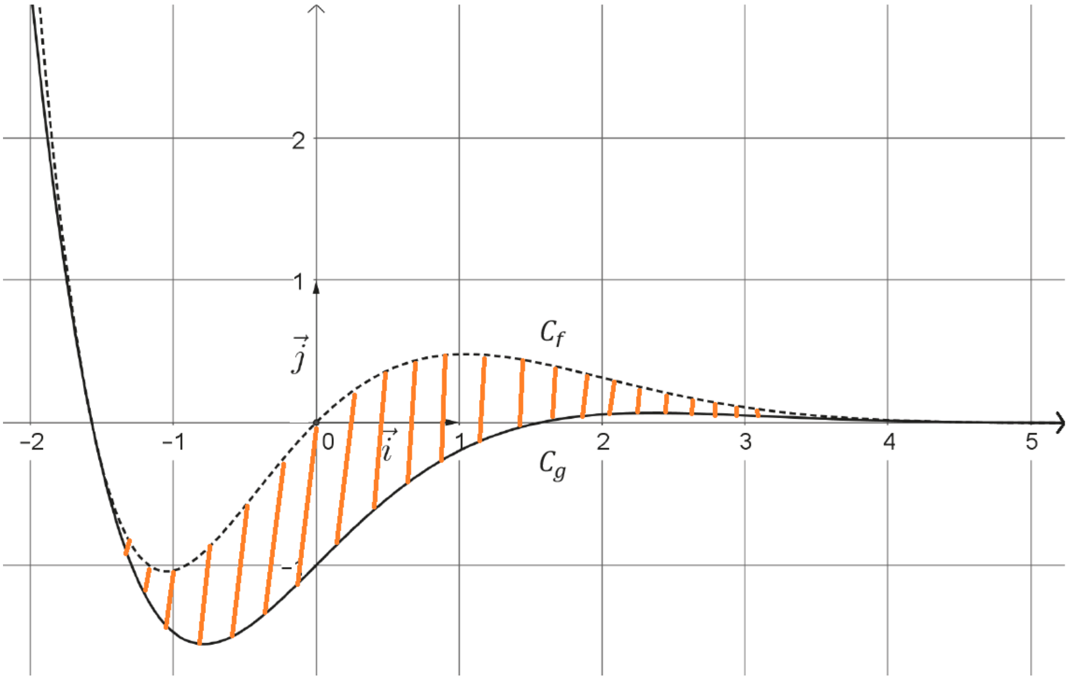
Or pour tout réel x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{-x} > 0 \\ (\sin x + 1) \geq 0 \end{cases} \implies f(x) - g(x) = \mathrm{e}^{-x}(\sin x + 1) \geq 0$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur $\mathbb{R}$

2. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $H(x) = \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1\right) \mathrm{e}^{-x}$. On admet que H est une primitive de la fonction $x \mapsto (\sin x + 1)\,\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, la courbe $\mathscr{C}_g$ est les droites d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.

2. a. Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ sur le graphique en annexe à rendre avec la copie.



2. b. Calculer, une unité d'aire, l'aire du domaine $\mathscr{D}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près en cm².

La fonction $h : x \longmapsto f(x) - g(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est positive d'après la question (B.1) et continue . Donc l'aire du domaine D est donné, en unités d'aire par :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= H\left(\frac{3\pi}{2}\right) - H\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\
\underline{\mathscr{A}} &= \boxed{-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\pi/2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\pi/2}\ \text{u.a.}}
\end{aligned}$$

Or 1 u.a. = 4 cm^2 donc

$$\mathscr{A} = \left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\pi/2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\pi/2}\right) \times 4\ \text{cm}^2 \approx \underline{9,60\ \text{cm}^2}$$

Exercice 4. Obligatoire : Suites 5 points

CANDIDATS N'AYANT PAS SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000. Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année : entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ; entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède. On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017+n$. On a donc $u_0 = 3000$.

1. **Justifier que $u_1 = 2926$.**
u_1 désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017+1 = 2018$.
Entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ; entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède soit de (u_0+80) . Effectuer une baisse de 5 % c'est multiplier par 0,95 donc :
$$u_1 = 0,95 \times (u_0+80) = \underline{2926}$$

2. **Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,95u_n + 76$.**
Pour n entier, u_{n+1} désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017+(n+1)$.
Entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ; entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède soit de (u_n+80) . Effectuer une baisse de 5 % c'est multiplier par 0,95 donc :
$$u_{n+1} = 0,95 \times (u_n+80) = \underline{0,95\,u_n+76}$$

3. *À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n). Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.*

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3 000	2 926	2 856	2 789	2 725	2 665	2 608	2 553

Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?
$$\boxed{=0.95*B2+76}$$

4. **4. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1\,520$.**
Notons pour tout entier naturel $n \geq 0$ le postulat
$$(P_n)\ :\ u_n \geqslant 1520$$
   - **Initialisation**
   Pour $n=0$, le postulat (P_0) est vrai puisque :
   $$u_0 = 3\,000 \geq 1\,520$$
   - **Hérédité**
   Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$.
   $$u_{n+1} = 0,95\,u_n + 76$$
   On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que : (P_n) soit vérifié et donc que
   $$u_n \geqslant 1520$$
   $$\begin{cases} u_{n+1} = 0,95\,u_n+76 \\ u_n \geq 1520 \end{cases} \implies \underbrace{0,95\,u_n+76}_{u_n} \geq 0,95\times 1520+75 = 1\,520$$
   On a alors montré que $u_{n+1} \geqslant 1520$ et donc que (P_{n+1}) est vrai.
   - **Conclusion**
   On a montré que (P_0) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geq 0$.
   $$\boxed{u_n \geqslant 1520}$$

4. b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

Pour n entier naturel on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 0,95u_n + 76 - u_n \\ &= -0,05u_n + 76 \end{aligned}$$

Or

$$u_n \geqslant 1520 \Longrightarrow -0,05u_n \leq -0,05 \times 1\,520 = -76$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -0,05u_n + 76 \\ u_{n+1} - u_n &\leq -76 + 76 \\ \underline{u_{n+1} - u_n} &\underline{\leq 0} \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc décroissante.

4. c. Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.

On vient de montrer que la suite (u_n) est <u>décroissante et minorée</u> par 1 520 donc la suite est convergente vers $L \geq 1\,520$.

5. *On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1520$.*

5. a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 3000 \\ u_{n+1} & = 0.95 \times u_n + \ 76 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 & \\ v_n & = u_n - 1520 \end{cases}$$

Pour tout entier $n \geq 0$ on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1520 \\ v_{n+1} &= (0,95\ u_n + \ 76) \ - 1520 \\ v_{n+1} &= 0,95 \times u_n - 1444 \\ v_{n+1} &= 0,95 \times \left(u_n + \frac{-1444}{0,95} \right) \\ v_{n+1} &= 0,95 \times (u_n - 1520) \\ v_{n+1} &= 0,95 \times v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une <u>suite géométrique</u> de raison $q = 0,95$, et de premier terme $v_0 = 1480$ puisque :

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 - 1520 \\ v_0 &= 3000 - 1520 \\ v_0 &= 1480 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = 1480 \\ v_{n+1} & = 0,95 \times v_n \end{cases} \ ; \ \forall n \geq 0}$$

5. b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1\,480 \times 0,95^n + 1\,520$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,95$, et de premier terme $v_0 = 1480$ donc son terme général est

$$\forall n \geq 0 \ ; \ v_n = v_0 \times (q)^{n-0}$$

Soit

$$\boxed{\forall n \geq 0 \ ; \ v_n = 1480 \times (0,95)^n}$$

De l'égalité définie pour tout entier $n \geq 0$:

$$v_n = u_n - 1520$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = v_n + 1520$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \geq 0\ ;\ u_n = 1480 \times (0{,}95)^n + 1520}$$

5. c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Théorème 4

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Ici $-1 < q = 0{,}95 < 1$ et d'après le théorème 4 on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}95)^n = 0$. Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} 1\,480 \times (0{,}95)^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(\underbrace{1\,480 \times (0{,}95)^n + 1\,520}_{u_n} \right) = 1\,520$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (u_n) :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1520}$$

6. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

```
n ← 0
u ← 3000
Tant que u ≥ 2 000
      n ← n + 1
      u ← 0,95 × u + 76
Fin de Tant que
```

La notation « ← » correspond à une affectation de valeur, ainsi « n ← 0 » signifie « Affecter à n la valeur 0 ».

7. La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

Le directeur est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000. On va donc résoudre l'inéquation $u_n < 2000$.

Pour tout entier naturels n :

$$\begin{aligned} u_n < 2000 &\Longleftrightarrow 1480 \times 0.95^n + 1520 < 2000 \\ &\Longleftrightarrow 1480 \times 0.95^n < 480 \\ &\Longleftrightarrow 0.95^n < \frac{480}{1480} = \frac{12}{37} \end{aligned}$$

En composant par la fonction $x \longmapsto \ln x$ définie et strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$u_n < 2000 \Longleftrightarrow \ln 0.95^n < \ln \frac{12}{37}$$

On applique alors la propriété $\ln a^n = n \ln a$ définie pour $a > 0$ et n entier :

$$u_n < 2000 \Longleftrightarrow n \ln 0.95 < \ln \frac{12}{37}$$

En divisant chaque membre par $\ln 0.95 < 0$, l'ordre change et :

$$u_n < 2000 \Longleftrightarrow n > \frac{\ln \frac{12}{37}}{\ln 0.95} \approx 21.95$$

Puisque n est entier, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc composé des entiers naturels supérieurs ou égaux à 22.

Conclusion : la réserve marine fermera en $2017 + 22 = 2039$.

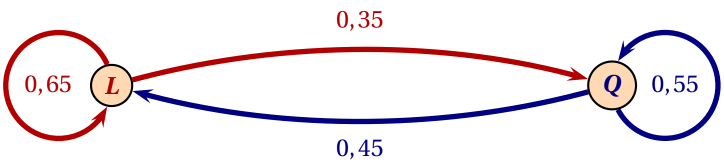
Exercice 4. Spécialité : Matrices et suites — 5 points

CANDIDATS AYANT SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le droit de pêche dans une réserve marine est réglementé : chaque pêcheur doit posséder une carte d'accréditation annuelle. Il existe deux types de cartes : une carte de pêche dite « libre » entre parenthèse le pêcheur mais pas limité en nombre de poissons pêchés) ; une carte de pêche dite « avec quota » (le pêcheur ne doit pas dépasser une certaine quantité hebdomadaire de poisson). On suppose que le nombre total de pêcheurs reste constant d'année en année.
On note, pour l'année $2017+n$ *:* ℓ_n *la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche libre ;* q_n *la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche avec quota. On observe que : chaque année, 65 % des possesseurs de la carte de pêche libres achète de nouveaux une carte de pêche libre l'année suivante ; Chaque année, 45 % des possesseurs de la carte de pêche avec quota acheté une carte de pêche libre l'année suivante ; En 2017, 40 % des pêcheurs ont acheté une carte de pêche libre. On a donc* $\ell_0 = 0{,}4$ *et* $q_0 = 0{,}6$. *On note, pour tout entier naturel* n, $P_n = \begin{pmatrix}\ell_n\\ q_n\end{pmatrix}$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = MP_n$, où M est la matrice carrée $\begin{pmatrix}0{,}65 & 0{,}45\\ 0{,}35 & 0{,}55\end{pmatrix}$.

Notons L l'événement « le pêcheur possède une carte de pêche libre » et Q l'événement « le pêcheur possède une carte de pêche avec quota » . On obtient donc le graphe probabiliste suivant :



La matrice de transition M se construit à partir des probabilités suivantes :

- 1ère ligne : probabilité d'aller de L vers L, de L vers Q ;
- 2ème ligne : probabilité d'aller de Q vers L, de Q vers Q.

On obtient donc :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix}0,65 & 0,35\\ 0,45 & 0,55\end{pmatrix}}$$

Pour tout entier n on a alors :

$$\begin{cases}\ell_{n+1} = 0,65\ell_n + 0,45q_n\\ q_{n+1} = 0,55q_n + 0,35\ell_n\end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix}\ell_{n+1}\\ q_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,65 & 0,45\\ 0,35 & 0,55\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ell_n\\ q_n\end{pmatrix} \Longrightarrow \underline{P_{n+1} = MP_n}$$

2. Calculer la proportion de pêcheurs achetant une carte de pêche avec quota en 2019.

La proportion de pêcheurs achetant une carte de pêche avec quota en 2019 est donnée par q_2 or :

$$P_2 = M\times P_1 = M^2P_0 = \begin{pmatrix}0,556\\ 0,444\end{pmatrix} \Longrightarrow \underline{q_2 = 0,444}$$

3. *Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :*

1 ○	$M:=\{\{0{,}65,0{,}45\},\{0{,}35,0{,}55\}\}$ ✓ $M:=\begin{pmatrix}0.65 & 0.45\\ 0.35 & 0.55\end{pmatrix}$
2 ○	$P_0:=\{\{0.4\},\{0.6\}\}$ ✓ $P_0:=\begin{pmatrix}0.4\\ 0.6\end{pmatrix}$
3 ○	$Q:=\{\{9,1\},\{7,\text{-}1\}\}$ ✓ $Q:=\begin{pmatrix}9 & 1\\ 7 & -1\end{pmatrix}$
4 ○	$T:=\{\{1/16,1/16\},\{7/16,\text{-}9/16\}\}$ ✓ $T:=\begin{pmatrix}\frac{1}{16} & \frac{1}{16}\\ \frac{7}{16} & -\frac{9}{16}\end{pmatrix}$

5 ○	TQ $\rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
6 ○	QT $\rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
7 ○	$D:=TMQ$ $\rightarrow\ D:=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$

En vous appuyant sur les résultats précédents, répondre aux deux questions suivantes :

3. a. Justifier que Q est une matrice inversible et préciser sa matrice inverse. On notera Q^{-1} la matrice inverse de Q.

D'après le logiciel :

$$TQ = QT = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Donc Q est une matrice inversible et

$$\boxed{Q^{-1} = T = \begin{pmatrix}\frac{1}{16} & \frac{1}{16}\\ \frac{7}{16} & -\frac{9}{16}\end{pmatrix}}$$

3. b. Justifier que $M = QDQ^{-1}$ et démontrer que, pour tout entier naturel n non nul : $M^n = QD^nQ^{-1}$.

D'après la ligne 7 on a :

$$D = Q^{-1}MQ \Longleftrightarrow QDQ^{-1} = M$$

Notons pour tout entier naturel $n \geq 0$ le postulat

$$(P_n)\ :\ M^n = QD^nQ^{-1}$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, le postulat (P_0) est vrai puisque :
  $$M^0 = \text{ Id } \text{ et } QD^0Q^{-1} = Q \times Id \times Q^{-1} = Id$$
- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$.
  $$\begin{aligned} M^{n+1} &= M \times M^n \\ &= QDQ^{-1} \times M^n \end{aligned}$$
  On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que : (P_n) soit vérifié et donc que $M^n = QD^nQ^{-1}$:
  $$\begin{aligned} M^{n+1} &= QD\underbrace{Q^{-1} \times Q}_{Id}D^nQ^{-1} \\ &= QDD^nQ^{-1} \\ &= QD^{n+1}Q^{-1} \end{aligned}$$
  On a alors montré que $M^{n+1} = QD^{n+1}Q^{-1}$ et donc que (P_{n+1}) est vrai.
- **Conclusion**
  On a montré que (P_0) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geq 0$.

$$\boxed{M^n = QD^nQ^{-1}}$$

4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, $M^n = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 9+7\times 0{,}2^n & 9-9\times 0{,}2^n \\ 7-7\times 0{,}2^n & 7+9\times 0{,}2^n \end{pmatrix}$.

4. a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $P_n = M^n P_0$.

Notons pour tout entier naturel $n \geq 0$ le postulat

$$(P_n)\ :\ P_n = M^n P_0$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, le postulat (P_0) est vrai puisque :

$$M^0 P_0 = Id \times P_0 = P_0$$

- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$.

$$P_{n+1} = MP_n$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que : (P_n) soit vérifié et donc que $P_n = M^n P_0$:

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= MP_n \\ &= M \times M^n P_0 \\ &= M^{n+1} P_0 \end{aligned}$$

On a alors montré que $P_{n+1} = M^{n+1} P_0$ et donc que (P_{n+1}) est vrai.

- **Conclusion**
  On a montré que (P_0) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geq 0$.

$$\boxed{P_n = M^n P_0}$$

4. b. Justifier que, pour tout entier naturel n : $\ell_n = \frac{9}{16} - \frac{13}{80} \times 0{,}2^n$.

Pour n entier :

$$P_n = M^n P_0 \iff \begin{pmatrix} \ell_n \\ q_n \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 9+7\times 0{,}2^n & 9-9\times 0{,}2^n \\ 7-7\times 0{,}2^n & 7+9\times 0{,}2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \ell_n &= \frac{1}{16}\left[0{,}4\left(9+7\times 0{,}2^n\right) + 0{,}6\left(9-9\times 0{,}2^n\right)\right] \\ &= \frac{1}{16}\left(3{,}6+2{,}8\times 0{,}2^n + 5{,}4 - 5{,}4\times 0{,}2^n\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(9-2{,}6\times 0{,}2^n\right) \\ \ell_n &= \frac{9}{16} - \frac{13}{80}\times 0{,}2^n \end{aligned}$$

5. La proportion de pêcheurs achetant la carte de pêche libre dépassera-t-elle 60 % ?

Pour tout entier n on a :

$$\frac{13}{80}\times 0{,}2^n > 0 \text{ et donc } -\frac{13}{80}\times 0{,}2^n < 0$$

De ce fait pour tout entier n :

$$\ell_n = \frac{9}{16} - \frac{13}{80}\times 0{,}2^n < \frac{9}{16} \approx 0{,}56 < 0{,}6$$

La proportion de pêcheurs achetant la carte de pêche libre ne dépassera pas 60 %

Fin du devoir