Math93.com

Baccalauréat 2018 - S
Correction Métropole

Série S Obli. et Spé.

22 juin 2018

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. Fonctions — 6 points

Commun à tous les candidats

1. **Justifier que le problème se ramène à la recherche des solutions de : (E) : $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 4x - 2 = 0$.**
   On cherche $x > 0$ tel que la largeur de l'arc de chaînette MM' soit égale à sa hauteur qui correspond à l'ordonnée du point M.
   $$M\left(x\,;\,\frac{1}{2}\left(e^x + \mathrm{e}^{-x} - 2\right)\right) \text{ et } M'\left(-x\,;\,\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-x} + e^x - 2\right)\right)$$
   Pour x strictement positif :
   $$\begin{aligned} MM' = y_M &\iff 2x = \frac{1}{2}\left(e^x + \mathrm{e}^{-x} - 2\right) \\ &\iff 4x = e^x + \mathrm{e}^{-x} - 2 \\ &\iff (E)\ :\ \begin{cases} e^x + \mathrm{e}^{-x} - 4x - 2 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2. *On note f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = e^x + e^{-x} - 4x - 2$.*

   2. a. Vérifier que pour $x > 0$, $f(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 4\right) + \mathrm{e}^{-x} - 2$.
   Pour $x > 0$, en développant l'expression donnée :
   $$\begin{aligned} x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - 4\right) + \mathrm{e}^{-x} - 2 &= \mathrm{e}^x - 4x + \mathrm{e}^{-x} - 2 \\ &= e^x + \mathrm{e}^{-x} - 4x - 2 \\ &= \underline{f(x)} \end{aligned}$$

   2. b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Propriété 1 (Limites liées à la fonction exponentielle)

- (1) limites usuelles :
  $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0 \end{cases}$$
- (2) croissances comparées :
  $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0 \end{cases}$$
- (3) (nombre dérivé en 0) :
  $$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$

Pour $x>0$,

$$f(x)=x\left(\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}-4\right)+\mathrm{e}^{-x}-2$$

C'est cette expression que l'on va considérer puisque l'on cherche la limite en $+\infty$, on considère $x>0$.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}=+\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}-4\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\end{cases} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}-4\right)=+\infty$$

Par ailleurs

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}-4=-4$$

Donc par somme :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}-4=-4\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}-4\right)=+\infty\end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\underbrace{x\left(\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}-4\right)+\mathrm{e}^{-x}-2}_{f(x)}=+\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$$

3.

3. a. Calculer f' sur $[0;+\infty[$.

Pour x sur $[0;+\infty[$ on a $f(x)=e^{x}+\mathrm{e}^{-x}-4x-2$. La dérivée de e^{u} étant $u'\mathrm{e}^{u}$ on obtient facilement :

$$\forall x\in[0;+\infty[\ ;\ f'(x)=\underline{e^{x}-\mathrm{e}^{-x}-4}$$

3. b. Montrer que l'équation $f'(x)=0$ équivaut à $(e^{x})^{2}-4\mathrm{e}^{x}-1=0$.

En multipliant les deux membres par e^{x} qui est strictement positif sut $\mathbb{R}$, donc a fortiori sur $[0;+\infty[$ on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x)=0 &\iff e^{x}-\mathrm{e}^{-x}-4=0\\ &\iff \mathrm{e}^{x}\times\left(e^{x}-\mathrm{e}^{-x}-4\right)=\mathrm{e}^{x}\times 0\\ f'(x)=0 &\iff \underline{\left(\mathrm{e}^{x}\right)^{2}-1-4\mathrm{e}^{x}=0}\end{aligned}$$

3. c. En posant $X=\mathrm{e}^{x}$, résoudre cette équation.

Posons $X=\mathrm{e}^{x}$, avec $x\in[0;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x)=0 &\iff \left(\mathrm{e}^{x}\right)^{2}-1-4\mathrm{e}^{x}=0\\ &\iff \begin{cases}X^{2}-4X-1=0\\ X=\mathrm{e}^{x}\end{cases}\end{aligned}$$

L'expression $\left(X^{2}-4X-1\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(aX^{2}+bX+c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a=1\\ b=-4\\ c=-1\end{array}\right| \Longrightarrow \Delta=20>0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $X\longmapsto\left(X^{2}-4X-1\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$X_1=\frac{4-\sqrt{20}}{2}\approx-0.2\notin]0;+\infty[\quad\text{et}\quad X_2=\frac{4+\sqrt{20}}{2}\approx 4.2\in]0;+\infty[$$

Donc

$$\begin{aligned} f'(x)=0 &\iff \begin{cases}X^{2}-4X-1=0\\ X=\mathrm{e}^{x}\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}X=\dfrac{4+\sqrt{20}}{2}=2+\sqrt{5}\\ X=\mathrm{e}^{x}\end{cases}\\ &\iff \underline{x=\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}\end{aligned}$$

4. *On donne le tableau de signe de f'.*

4. a. Dresser le tableau de variations de f.

$$f(x)=x\left(\frac{e^x}{x}-4\right)+e^{-x}-2 \Longrightarrow \begin{cases} f(0)=0 \\ f\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)=-4\ln\left(2+\sqrt{5}\right)+2\sqrt{5}-2\approx -3,3 \\ f(3)\approx 6,1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \end{cases}$$

x	0		$\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\approx 1.44$		α		3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0			$+$			
Variations de f	0	$\searrow$	≈ -3.3	$\nearrow$	0	$\nearrow$	≈ 6.1	$\nearrow$	$+\infty$

4. b. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution strictement positive.

- Sur l'intervalle $\left[0;\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right]$: la fonction f est strictement décroissante et de maximum 0 atteint pour $x=0$. De ce fait, l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution strictement positive.

- Sur l'intervalle $[3;+\infty[$: la fonction f est strictement croissante et de minimum $f(3)\approx 6,1>0$ atteint pour $x=3$. De ce fait, l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution strictement positive.

- Sur l'intervalle $\left[\ln\left(2+\sqrt{5}\right);3\right]$:

Théorème 1 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution dans $[a\,;\,b]$.

Remarque *: Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).*

  - Application du corollaire sur $\left[\ln\left(2+\sqrt{5}\right);3\right]$:
    - La fonction f est *continue* et *strictement croissante* sur l'intervalle $\left[\ln\left(2+\sqrt{5}\right);3\right]$;
    - Le réel $k=0$ est compris entre $f\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)\approx -3.3$ et $f(3)\approx 6.1$
    - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $\left[\ln\left(2+\sqrt{5}\right);3\right]$.

- Conclusion : l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution strictement positive.

5. *On considère cet algorithme.*

```
Tant que b − a > 0,1 faire :
    m ← (a+b)/2
    Si e^m + e^(−m) − 4m − 2 > 0, alors :
            b ← m
    Sinon :
            a ← m
    Fin Si
Fin Tant que
```

5. a. Compléter le tableau suivant :

m	a	b	$b-a$	$f(m)$	test $f(m)>0$
	2	3	1		
2.5	2	2.5	0.5	0.264578959	VRAI
2.25	2.25	2.5	0.25	-1.406864939	FAUX
2.375	2.375	2.5	0.125	-0.655972325	FAUX
2.4375	2.4375	2.5	$0.0625 < 0,1$ STOP	-0.218227009	FAUX

5. b. Comment peut-on utiliser les valeurs obtenues en fin d'algorithme à la question précédente ?
Cet algorithme permet de résoudre l'équation $f(x)=0$ par dichotomie, sachant que la solution strictement positive α appartient à intervalle $[2\,;\,3]$. On obtient un encadrement au dixième de cette solution : $\underline{2,4375<\alpha<2,5}$.

6. La Gateway Arch, édifiée dans la ville de Saint-Louis aux États- Unis, a l'allure ci-contre. Son profil peut être approché par un arc de chaînette renversé dont la largeur est égale à la hauteur. La largeur de cet arc, exprimée en mètre, est égale au double de la solution strictement positive de l'équation : $(E')\ :\ \mathrm{e}^{\frac{t}{39}}+\mathrm{e}^{-\frac{t}{39}}-4\dfrac{t}{39}-2=0$. Donner un encadrement de la hauteur de la Gateway Arch.

Pour t strictement positif :

$$\begin{aligned}(E')\ :\ \mathrm{e}^{\frac{t}{39}}+\mathrm{e}^{-\frac{t}{39}}-4\frac{t}{39}-2=0 &\iff \begin{cases} x=\frac{t}{39}>0\\ (E)\ :\ \mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}-4x-2=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} x=\frac{t}{39}>0\\ x=\alpha\end{cases}\\ &\iff t=39\alpha\end{aligned}$$

Or on vu que :

$$2,4375<\alpha<2,5 \Rightarrow \underline{95,0625<t<97,5}$$

La hauteur de la Gateway Arch est en mètre $\underline{190,125<2t<195}$.

Exercice 2. Probabilités 4 points

Commun à tous les candidats

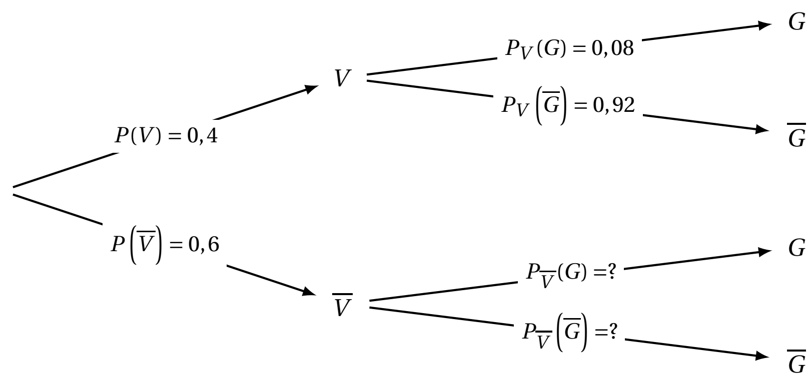
Partie A

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné. Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que : 40% de la population est vaccinée ; 8% des personnes vaccinées ont contracté la grippe ; 20% de la population a contracté la grippe. On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les événements : V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ; G : « la personne a contracté la grippe ».

1.

1. a. Donner la probabilité de l'événement G.
20% de la population a contracté la grippe donc $\underline{P(G) = 0,2}$.

1. b. Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.



2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.
La probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée est :

$$P(G \cap V) = 0,4 \times 0,08 = \underline{0,032}$$

3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28.
Sachant que la personne choisie n'est pas vaccinée, la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est d'après la formule de Bayes :

$$P_{\overline{V}}(G) = \frac{P\left(\overline{V} \cap G\right)}{P\left(\overline{V}\right)} = \frac{P\left(\overline{V} \cap G\right)}{0,6}$$

- Calculons $P\left(\overline{V} \cap G\right)$.
  Les évènement V et $\overline{V}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales on a :

  $$P(G) = P(G \cap V) + P\left(\overline{V} \cap G\right) \Longleftrightarrow 0,2 = 0,032 + P\left(\overline{V} \cap G\right)$$

  Donc

  $$P\left(\overline{V} \cap G\right) = 0,2 - 0,032 = \underline{0,168}$$

- Conclusion :

  $$P_{\overline{V}}(G) = \frac{0,16}{0,6} = \underline{0,28}$$

  La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28

Remarque historique

Thomas Bayes (1702 – 1761) est un mathématicien britannique et pasteur de l'Église presbytérienne, connu pour avoir formulé le théorème de Bayes.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10 @ près. Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville. Après la période hivernale, on interroge au hasard B habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à B tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4. On note ' la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les B interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?

Modélisation
Il y a répétition de $n = n$ événements indépendants et identiques (on tire un habitant).
Chaque tirage a deux issues possibles (épreuve de Bernoulli) :

- succès de probabilité $p = 0,4$ quand un habitant est vacciné ;
- et échec de probabilité $1 - p = 0,6$ sinon.

Donc la variable aléatoire X qui est égale au nombre de succès au cours de ces n épreuves *indépendantes* de *Bernoulli* de paramètre $p = 0,4$ suit une *loi binomiale* de paramètres $n = n$ et $p = 0,4$.
On peut écrire :

$$X \text{ suit } \mathscr{B}\left(n\,;\,0,4\right) \text{ ou } X \sim \mathscr{B}\left(n\,;\,0,4\right).$$

2. *Dans cette question, on suppose que $n = 40$.*

2. a. Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.
Puisque X suit une loi Binomiale de paramètre $n = 40$ et $p = 0,4$ on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{40}{k} \times 0,4^k \times (0,6)^{40-k}$$

Et donc

$$p(X = 15) = \binom{40}{15} \times 0,4^{15} \times 0,6^{25}$$

Soit :

$$\boxed{p(X = 15) \approx 0.123}$$

> *Calculatrices*
>
> - *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.binomDdP* (40 , 0,4 , 15) ≈ 0,123
> - *Sur TI82/83+ : Menu Distrib ⇒ binomFdp* (40 , 0,4 , 15) ≈ 0,123
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu Opt/STAT/DIST/DINM ⇒ binomialPD* (15 , 40 , 0,4) ≈ 0,123

2. b. Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.
La probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit en passant à l'évènement contraire : vaccinée est $P(X \geq 20)$ soit

$$P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19) \approx \underline{0,13}$$

> *Calculatrices*
>
> - *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.binomFdR* (40 , 0,4 , 19) ≈ 0,87023
> - *Sur TI82/83+ : Menu Distrib ⇒ binomFrép* (40 , 0,4 , 19) ≈ 0,87023
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu Opt/STAT/DIST/DINM ⇒ binomialCD* (19 , 40 , 0,4) ≈ 0,87023

3. **On interroge un échantillon de 3750 habitants de la ville, c'est-à-dire que l'on suppose ici que $n = 3750$. On note Z la variable aléatoire définie par : $Z = \dfrac{X - 1500}{30}$. On admet que la loi de probabilité de la variable aléatoire Z peut être approchée par la loi normale centrée réduite. En utilisant cette approximation, déterminer la probabilité qu'il y ait entre 1450 et 1550 individus vaccinés dans l'échantillon interrogé.**
On admet que la loi de probabilité de la variable aléatoire Z peut être approchée par la loi normale centrée réduite . La probabilité qu'il y ait entre 1450 et 1550 individus vaccinés dans l'échantillon interrogé est donnée par :

$$\begin{aligned} P(1450 < X < 1550) &= P\left(\frac{1450 - 1500}{30} < \frac{X - 1500}{30} < \frac{1550 - 1500}{30}\right) \\ &= P\left(-\frac{5}{3} < \frac{X - 1500}{30} < \frac{5}{3}\right) \\ &= P\left(-\frac{5}{3} < Z < \frac{5}{3}\right) \end{aligned}$$

Or Z peut être approchée par la loi normale centrée réduite donc la calculatrice donne :

$$P(1450 < X < 1550) = P\left(-\frac{5}{3} < Z < \frac{5}{3}\right) \approx 0.904$$

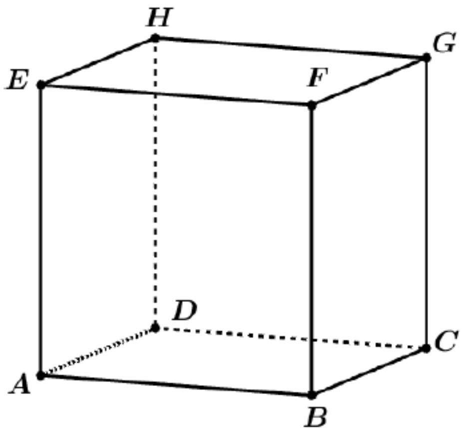
Exercice 3. Espace — 5 points

Commun à tous les candidats

Le but de cet exercice est d'examiner, dans différents cas, si les hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes, c'est-à-dire d'étudier l'existence d'un point d'intersection de ses quatre hauteurs. On rappelle que dans un tétraèdre HIJ, la hauteur issue de est la droite passant par A orthogonale au plan (BCD).

Partie A Étude de cas particuliers

On considère un cube ABCDEFGH.



On admet que les droites (AG), (BH), (CE) et (DF) appelées « grandes diagonales » du cube, sont concourantes.

1. *On considère le tétraèdre ABCE.*

1. a. Préciser la hauteur issue de E et la hauteur issue de C dans ce tétraèdre.
Dans le tétraèdre ABCE, la hauteur issue de E est [EA] et la hauteur issue de C est [BC].

1. b. Les quatre hauteurs du tétraèdre ABCE sont-elles concourantes ?
Les droites (EA) et (BC) ne sont pas coplanaires de ce faites quatre hauteurs du tétraèdre ABCE ne sont donc pas concourantes.

2. *On considère le tétraèdre ACHE et on travaille dans le repère* $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.

2. a. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ACH) est : $x - y + z = 0$.
Dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$ on a :

$$A(0;0;0)\ ;\ C(1;1;0)\ ;\ H(0;1;1)$$

or les coordonnées des points vérifient l'équation proposée et ces points ne sont pas alignés (ce sont des sommets du cube). De ce fait, une équation cartésienne du plan (ACH) est : $x - y + z = 0$.

2. b. En déduire que (FD) est la hauteur issue de F du tétraèdre ACHF.

Propriété 2

Soit vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul et un point A de l'espace. L'unique plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{u} = 0$.
Dans un repère de l'espace, son équation est alors de la forme :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix}\,.\,\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff a\left(x-x_A\right)+b\left(y-y_A\right)+c\left(z-z_A\right)=0$$

Puisque une équation cartésienne du plan (ACH) est : $x - y + z = 0$, un vecteur normal de ce plan est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dans $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$ on a :

$$\begin{cases} F\,(1\,;\,0\,;\,1) \\ D\,(0\,;\,1\,;\,0) \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{FD}$ est normal au plan (ACH). La droite (FD) est donc la hauteur issue de F du tétraèdre ACHF.

2. c. Par analogie avec le résultat précédent, préciser les hauteurs du tétraèdre ACHF issues respectivement des sommets A, C et H. Les quatre hauteurs du tétraèdre ACHF sont-elles concourantes ?

La hauteur du tétraèdre régulier ACHF issue de A est [AG], la hauteur issue de C est [CE] et celle issue de H est [BH]. Ces quatre hauteurs se coupent en O le centre du carré. Elles sont donc concourantes.

Partie B

Dans cette partie, on considère un tétraèdre MNPQ dont les hauteurs issues des sommets M et N sont sécantes en un point K. Les droites (MK) et (NK) sont donc orthogonales aux plans (NPQ) et (MPQ) respectivement.

1. **Justifier que la droite (PQ) est orthogonale à la droite (MK) ; on admet de même que les droites (PQ) et (NK) sont orthogonales.**

   La droite (MK) est orthogonale au plan (NPQ). Elle est donc orthogonale à toutes les droites de ce plan, et donc à la droite (PQ).

2. **Que peut-on déduire de la question précédente relativement à la droite (PQ) et au plan (MNK) ? Justifier la réponse.**

   La droite (PQ) est orthogonale à deux droites sécantes (MK) et (NK) du plan (MNK) donc elle est orthogonale au plan (MNK).

3. **Montrer que les arêtes [MN] et [PQ] sont orthogonales.**

   La droite (PQ) est orthogonale au plan (MNK) et donc à toutes les droites de ce plan. Donc (PQ) est orthogonale à la droite (MN) qui appartient au plan (MNK). De ce fait les arêtes [MN] et [PQ] sont orthogonales.

Partie C

dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$ on a :

$$\begin{cases} R\,(-3\,;\,5\,;\,2) \\ S\,(1\,;\,4\,;\,-2) \\ T\,(4\,;\,-1\,;\,5) \\ U\,(4\,;\,7\,;\,3) \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{RT}\begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} . \overrightarrow{SU}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 21 - 18 + 15 = 18 \neq 0$$

D'après la contraposée de la propriété, deux des arêtes du tétraèdre ne sont pas orthogonales, donc le tétraèdre RSTU n'est pas orthocentrique.

Exercice 4. Obligatoire : complexes — 5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On pose pour n entier $\begin{cases} z_0 = 8 \\ z_{n+1} = \dfrac{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{4} z_n \end{cases}$, $A(z_n)$.

1.

1. a. Vérifier que : $\dfrac{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{-\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{-\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

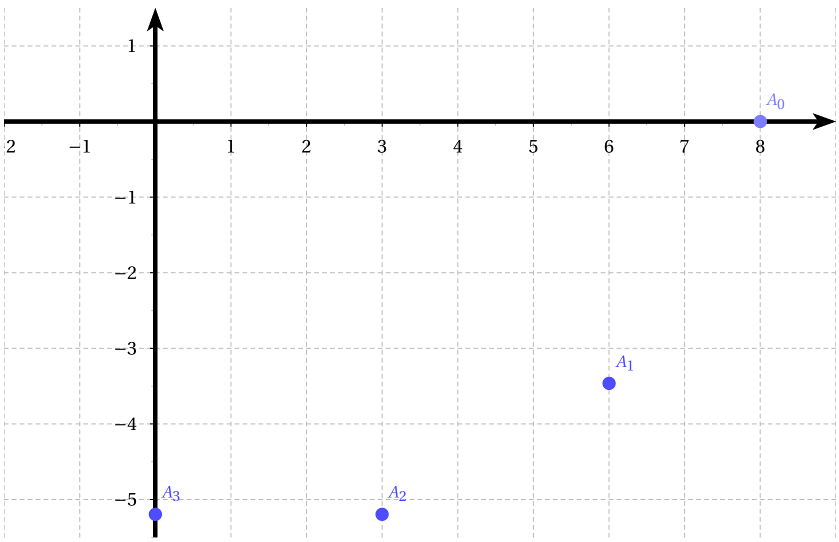
Donc

$$\boxed{\frac{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$$

1. b. En déduire l'écriture de chacun des nombres complexes z_1, z_2 et z_3 sous forme exponentielle et vérifier que z_3 est un imaginaire pur dont on précisera la partie imaginaire.

- $z_1 = \dfrac{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} \times 8 = 8 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6} = \underline{4\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}}$.
- $z_2 = \dfrac{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} \times 4\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6} = 4\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6} = \underline{6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}}$.
- $z_3 = \dfrac{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} \times 6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6} \times 6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3} = \underline{3\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}}$.
- Par ailleurs, puisque $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2} = -\mathrm{i}$ on a $z_3 = -3\mathrm{i}\sqrt{3}$.
  z_3 est donc un imaginaire pur de partie imaginaire $-3\sqrt{3}$.

1. c. Représenter graphiquement les points A_0 , A_1 , A_2 et A_3 ; on prendra pour unité le centimètre.



2.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$.

Notons pour tout entier naturel $n \geq 0$ le postulat

$$(P_n)\ :\ z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, le postulat (P_0) est vrai puisque :

$$z_0 = 8 \quad \text{et} \quad 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^0 \mathrm{e}^0 = 8$$

- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$.

$$z_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times z_n$$

  On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que : (P_n) soit vérifié et donc que

$$\begin{cases} z_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times z_n \\ z_n = 8 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}} \end{cases} \Longrightarrow z_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}} = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$$

  et donc

  On a alors montré que $z_{n+1} = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{(n+1)\pi}{6}}$ et donc que (P_{n+1}) est vrai.

- **Conclusion**
  On a montré que (P_0) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geq 0$.

$$\boxed{z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}}$$

2. b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$. Déterminer la nature et la limite de la suite (u_n).

Pour tout entier n on a :

$$u_n = |z_n| = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Théorème 2

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Donc puisque $-1 < q = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} \underbrace{8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}_{u_n} = 0$$

La limite de la suite géométrique (u_n) est donc 0.

3.

3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel k, $\dfrac{z_{k+1}-z_k}{z_{k+1}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}$. En déduire que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité : $A_kA_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{O}A_{k+1}$.

Pour tout entier naturel k,

$$\begin{aligned}
\frac{z_{k+1}-z_k}{z_{k+1}} &= 1-\frac{z_k}{z_{k+1}}\\
&= 1-\frac{8\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^k\times \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}k\pi}{6}}}{8\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k+1}\times \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}(k+1)\pi}{6}}}\\
&= 1-\frac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{6}}}\\
&= 1-\frac{2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}}{\sqrt{3}}\\
&= 1-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\\
&= 1-1-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}\\
\frac{z_{k+1}-z_k}{z_{k+1}} &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}
\end{aligned}$$

Par ailleurs en passant au module on obtient :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z_{k+1}-z_k}{z_{k+1}}\right| = \left|-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}\right| &\iff \frac{|z_{k+1}-z_k|}{|z_{k+1}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\\
&\iff \frac{A_kA_{k+1}}{OA_{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\\
&\iff \boxed{A_kA_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{O}A_{k+1}}
\end{aligned}$$

3. b. Pour tout entier naturel n, on appelle ℓ_n la longueur de la ligne brisée reliant dans cet ordre les points A_0, A_1, A_2, ..., A_n. On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$. Démontrer que la suite (ℓ_n) est convergente et calculer sa limite.

On va appliquer Le résultat précédent c'est à dire que pour tout entier naturel k, on a l'égalité : $A_kA_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{O}A_{k+1}$.
On obtient pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned}
\ell_n &= A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n \\
\ell_n &= \frac{1}{\sqrt{3}}A_0A_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}OA_2 + \ldots + \frac{1}{\sqrt{3}}OA_n \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)
\end{aligned}$$

On retrouve alors la somme de n termes d'une suite géométrique (u_n) de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, de premier terme $u_1 = |z_1| = 4\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}
\ell_n &= \frac{1}{\sqrt{3}} \times u_1 \times \frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \times \frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
\ell_n &= 4 \times \frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
\ell_n &= \frac{8}{2-\sqrt{3}} \times \left(1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Théorème 3

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Donc puisque $-1 < q < 1$ on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\right) = 1$$

d'où

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{8}{2-\sqrt{3}} = 8\left(\sqrt{3}+2\right)}$$

Exercice 4. Spécialité : arithmétique 5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'équation suivante dont les inconnues x et y sont des entiers naturels : $x^2 - 8y^2 = 1$. (E)

1. **Déterminer un couple solution $(x\ ;\ y)$ où x et y sont deux entiers naturels.**
   Le couple $(1\ ;\ 0)$ est solution de l'équation puisque $1^2 - 8 \times 0^2 = 1$.

2. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   On définit les suites d'entiers naturels (x_n) *et* (y_n) *par :* $x_0 = 1,\ y_0 = 0$, *et pour tout entier naturel* n, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

   2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, le couple $(x_n\ ;\ y_n)$ est solution de l'équation (E).
   Notons pour tout entier naturel $n \geq 1$ le postulat

$$(P_n)\ :\ x_n^2 - 8y_n^2 = 1$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 1$, le postulat (P_1) est vrai puisque d'après la question (A.1), le couple $(x_0 = 1\ ;\ y_0 = 0)$ est solution de (E).
- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_n + 8y_n \\ x_n + 3y_n \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 8y_n \\ y_{n+1} = x_n + 3y_n \end{cases}
\end{aligned}$$

  On calcule alors :

$$\begin{aligned}
(x_{n+1})^2 - 8\left(y_{n+1}\right)^2 &= \left(3x_n + 8y_n\right)^2 - 8\left(x_n + 3y_n\right)^2 \\
&= 9x_n{}^2 + 64y_n{}^2 + 48x_n y_n - 8\left(x_n{}^2 + 9y_n{}^2 + 6x_n y_n\right) \\
&= 9x_n{}^2 + 64y_n{}^2 + 48x_n y_n - 8x_n{}^2 - 72y_n{}^2 - 48x_n y_n \\
(x_{n+1})^2 - 8\left(y_{n+1}\right)^2 &= x_n{}^2 - 8y_n{}^2
\end{aligned}$$

  On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que : (P_n) soit vérifié et donc que

$$x_n^2 - 8y_n^2 = 1$$

$$(x_{n+1})^2 - 8\left(y_{n+1}\right)^2 = x_n{}^2 - 8y_n{}^2 = 1$$

  On a alors montré que $x_{n+1}^2 - 8y_{n+1}^2 = 1$ et donc que (P_{n+1}) est vrai.
- **Conclusion**
  On a montré que (P_1) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geq 1$.

$$\boxed{x_n^2 - 8y_n^2 = 1}$$

2. b. En admettant que la suite (x_n) est à valeurs strictement positives, démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $x_{n+1} > x_n$.

Pour tout entier naturel n, on a :

$$x_{n+1} - x_n = 3x_n + 8y_n - x_n = 2x_n + 8y_n$$

Or on admet que la suite (x_n) est à valeurs strictement positives et on sait que (y_n) est positive car c'est une suite d'entiers naturels. De ce fait pour tout entier n :

$$\begin{cases} x_n > 0 \\ y_n \geq 0 \\ x_{n+1} - x_n = 2x_n + 8y_n \end{cases} \Longrightarrow x_{n+1} - x_n = 2x_n + 8y_n > 0 \Longrightarrow \underline{x_{n+1} > x_n}$$

3. En déduire que l'équation (E) admet une infinité de couples solutions.

La suite (x_n) est donc une suite strictement croissante d'entiers naturels. Chacun de ses termes est supérieur strictement au précédent, donc elle admet une infinité de valeurs distinctes. L'équation (E) admet donc une infinité de couples solutions.

Partie B

Un entier naturel n est appelé un nombre puissant lorsque, pour tout diviseur premier p de n, p^2 divise n.

1. Vérifier qu'il existe deux nombres entiers consécutifs inférieurs à 10 qui sont puissants.

- On a $8 = 2^3$ donc le seul nombre premier qui divise 8 est 2. Or 8 est divisible par $2^2 = 4$, il est donc puissant.
- On a $9 = 3^2$ donc le seul nombre premier qui divise 9 est 9. Or 9 est divisible par $3^2 = 9$, il est donc puissant.
- Conclusion : il existe deux nombres entiers consécutifs inférieurs à 10 qui sont puissants, les entiers 8 et 9.

L'objectif de cette partie est de démontrer, à l'aide des résultats de la partie A, qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers naturels consécutifs puissants et d'en trouver quelques exemples.

2. Soient a et b deux entiers naturels. Montrer que l'entier naturel $n = a^2b^3$ est un nombre puissant.

- $n = a^2b^3$ donc les diviseurs premiers de n sont ceux de a et de b.
- Soit p un diviseur premier de a, alors il existe un entier q tel que $a = pq$ et donc :

$$n = a^2b^3 = p^2 q^2 b^3 = p^2 \times \underbrace{\left(q^2 b^3\right)}_{\in\mathbb{N}}$$

  Donc p^2 divise n.
- Soit p_2 un diviseur premier de b, alors il existe un entier q_2 tel que $b = p_2q_2$ et donc :

$$n = a^2b^3 = a^2 p_2^3 q_2^3 = p_2^2 \times \underbrace{\left(a^2 p_2 q_2^3\right)}_{\in\mathbb{N}}$$

  Donc p_2^2 divise n.
- Conclusion : l'entier naturel $n = a^2b^3$ est un nombre puissant car pour tout diviseur premier p de n, p^2 divise n.

3. Montrer que si $(x\,;\,y)$ est un couple solution de l'équation (E) définie dans la partie A, alors $x^2 - 1$ et x^2 sont des entiers consécutifs puissants.

- Soit $(x\,;\,y)$ une solution de (E), alors

$$x^2 - 8y^2 = 1 \iff x^2 - 1 = y^2 \times 2^3 = a^2 b^3 \text{ avec } \begin{cases} a = y \\ b = 2 \end{cases}$$

- On applique alors le résultat de la question (B.2.) qui implique que l'entier $y^2 \times 2^3$ est puissant, et donc que $\underline{x^2 - 1 \text{ est puissant}}$.
- Par ailleurs, les seuls diviseurs premiers de x^2 sont ceux de x. Donc si p est un diviseur premier de x, il existe alors un entier naturel q tel que $x = pq$. Donc $x^2 = p^2q^2$ et p^2 divise x^2.
  Donc $\underline{x^2 \text{ est puissant}}$.

- Conclusion : si $(x\ ;\ y)$ est un couple solution de l'équation (E) définie dans la partie A, alors x^2-1 et x^2 sont des entiers consécutifs puissants.

4. Conclure quant à l'objectif fixé pour cette partie, en démontrant qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers consécutifs puissants. Déterminer deux nombres entiers consécutifs puissants supérieurs à 2018.

- D'après la question (A.3.) il existe une infinité de couples solutions à l'équation (E).
- D'après la question (B.3.) pour chaque couple solution on peut déterminer deux entiers consécutifs puissants.
- Il existe donc une infinité de couples de nombres entiers consécutifs puissants.
- Un exemple. Avec la calculatrice

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99 \\ 35 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 577 \\ 204 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{cases} x_3^2 = 99^2 = 9\,801 \\ x_3^2 - 1 = 9\,800 \end{cases} \quad \text{sont puissants.}$$

De même x_4^2 et x_4^2-1 sont puissants.

Fin du devoir

©ISSN 2272-5318