Corrigé du baccalauréat S Métropole–La Réunion 13 septembre 2018

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. On a le système $\left\{\begin{array}{l c l} g(0) &=& \frac{1}{8}\\ g(10) &=& \frac{64}{100}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} \frac{1}{1+k\text{e}^{-0}} &=& \frac{1}{8}\\ \frac{1}{1+k\text{e}^{-10a}} &=& \frac{64}{100}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} \frac{1}{1+k} &=& \frac{1}{8}\\ \frac{1}{1+k\text{e}^{-10a}} &=& \frac{64}{100}\end{array}\right.$
   La première équation donne $k = 7$ et en reportant cette valeur dans la deuxième équation :
   $\dfrac{1}{1+7\text{e}^{-10a}} = \frac{64}{100} \iff 100 = 64\left(1+7\text{e}^{-10a}\right) \iff 100 = 64+448\text{e}^{-10a} \iff 36 = 448\text{e}^{-10a} \iff$
   $9 = 112\text{e}^{-10a} \iff \frac{9}{112} = \text{e}^{-10a} \iff -10a = \ln\frac{9}{112} \iff a = -\dfrac{1}{10}\ln\frac{9}{112} \iff a \approx 0{,}252\,127$
2. $$g(t) = \frac{1}{1+7\text{e}^{-\frac{t}{4}}}.$$
   a. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
   $g'(t) = -7\times\dfrac{-\frac{1}{4}\text{e}^{-\frac{1}{4}t}}{\left(1+7\text{e}^{-\frac{t}{4}}\right)^2} = \dfrac{7\text{e}^{-\frac{t}{4}}}{4\left(1+7\text{e}^{-\frac{t}{4}}\right)^2} > 0$ car quotient de termes supérieurs à zéro.
   La fonction g est donc strictement croissante sur $[0~;~+\infty[$.
   b. Résolvons l'inéquation : $\dfrac{1}{1+7\text{e}^{-\left(\frac{t}{4}\right)}} \geqslant 0{,}99 \iff 1 \geqslant 0{,}99\left(1+7\text{e}^{-\left(\frac{t}{4}\right)}\right) \iff$
   $1 \geqslant 0{,}99+6{,}93\text{e}^{-\frac{t}{4}} \iff 0{,}01 \geqslant 6{,}93\text{e}^{-\frac{t}{4}} \iff \dfrac{0{,}01}{6{,}93} \geqslant \text{e}^{-\frac{t}{4}} \iff \dfrac{1}{693} \geqslant \text{e}^{-\frac{t}{4}} \iff$
   $\ln\dfrac{1}{693} \geqslant -\dfrac{t}{4}$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) $\iff \dfrac{t}{4} \geqslant -\ln\dfrac{1}{693} \iff$
   $t \geqslant 4\times\left(-\ln\dfrac{1}{693}\right)$. Or $4\times\left(-\ln\dfrac{10}{693}\right) \approx 26{,}2$.
   Donc dans 27 ans d'après ce modèle au moins 99 % des ménages seront équipés.
3. **a.** On a $g(18) = \dfrac{1}{1+7\text{e}^{-\left(\frac{18}{4}\right)}} = \dfrac{1}{1+7\text{e}^{-\frac{9}{2}}} \approx 0{,}928$ soit 0,93 au centième près.
   b. Intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :
   $n = 1\,000 > 30$; $np = 930 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 70 \geqslant 5$: on peut donc considérer l'intervalle
   $\left[p-1{,}96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}~;~p+1{,}96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right] \approx [0{,}914~;~0{,}946]$.
   Or le sondage donne une fréquence de foyers équipés d'une connexion fixe égale à
   $\dfrac{880}{1\,000} = 0{,}880$ et $0{,}880 \notin [0{,}914~;~0{,}946]$.
   Ce sondage donne raison à ces statisticiens sceptiques.

Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. $\left(z^2-2z+4\right)\left(z^2+4\right)=0 \iff \left[\begin{array}{lcl} z^2-2z+4 & = & 0 \\ \text{ou} & & \\ z^2+4 & = & 0 \end{array}\right.$.

- $z^2-2z+4=0 \iff (z-1)^2-1+4=0 \iff (z-1)^2=-3 \iff (z-1)^2=\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2$.

Cette équation a deux solutions $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $1-\mathrm{i}\sqrt{3}$.

- $z^2+4=0 \iff z^2=(2\mathrm{i})^2$: cette équation a deux solutions : $2\mathrm{i}$ et $-2\mathrm{i}$.

Conclusion : l'équation a quatre solutions :

$1+\mathrm{i}\sqrt{3}$; $1-\mathrm{i}\sqrt{3}$; $2\mathrm{i}$; $-2\mathrm{i}$.

2. **a.** • $|z_A|^2=1+3=4=2^2 \Rightarrow |z_A|=2$.

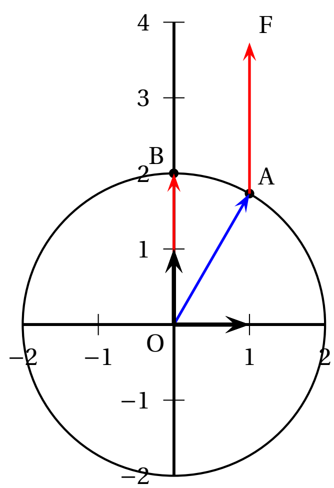
On peut écrire $z_A=2\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$ soit en écriture exponentielle

$z_A=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

• $z_B=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

On a donc avec les modules OA = OB = 2 : A et B appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

b.



c. On a $\dfrac{z_B}{z_A}=\dfrac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

Or $\left(\overrightarrow{OA},\,\overrightarrow{OB}\right)=\arg\dfrac{z_B}{z_A}=\dfrac{\pi}{6}$.

3. **a.** F se construit par la méthode du parallélogramme; or on a vu que OA = OB : le parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un losange de côtés de mesure 2.

b. OAFB est un parallélogramme et OA = OB = 1, donc deux de ses côtés consécutifs ont même longueur : OAFB est donc un losange et par conséquent la droite (OF) est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{OA},\,\overrightarrow{OB}\right)$; donc une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA},\,\overrightarrow{OF}\right)$ est $\dfrac{\pi}{12}$.

$\left(\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{OF}\right)=\left(\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA},\,\overrightarrow{OF}\right)=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{5\pi}{12}$ qui est un argument de z_F.

c. On a $z_F=z_A+z_B=1+\mathrm{i}\sqrt{3}+2\mathrm{i}=1+\mathrm{i}\left(\sqrt{3}+2\right)$.

Donc $|z_F|^2=1^2+\left(\sqrt{3}+2\right)^2=1+3+4+4\sqrt{3}=8+4\sqrt{3}=4\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Donc $|z_{\text{F}}| = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

On a vu qu'un argument de z_{F} est $\dfrac{5\pi}{12}$, donc l'écriture trigonométrique de z_{F} est :

$z_{\text{F}} = 2\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + \text{i}\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

d. On a vu que la partie réelle de z_{F} est égale à 1 et d'après la question précédente elle est aussi égale à $2\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)}\cos\dfrac{5\pi}{12}$.

Donc en égalant :

$1 = 2\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)}\cos\dfrac{5\pi}{12} \iff \cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\times(4-3)} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

4. Ces deux nombres sont positifs ($\sqrt{6} > \sqrt{2}$) ; comparons leurs carrés :

- $\left[\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right]^2 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$;
- $\left[\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right]^2 = \dfrac{6+2-2\sqrt{12}}{16} = \dfrac{8-4\sqrt{3}}{16} = \dfrac{4\left(2-\sqrt{3}\right)}{16} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$.

Ces deux nombres positifs ont le même carré : ils sont égaux; les deux calculatrices donnent le résultat correct.

Exercice 3 **6 points**
Commun à tous les candidats

Question 1

Tout point M de (D) a des coordonnées qui vérifient $x+y+z-3 = 2+t+1-3t+2t-3 = 0$, donc appartient à (P) : la droite (D) est incluse dans le plan (P) : réponse B.

Question 2

On sait que $E = \dfrac{1}{\lambda} = 20$ donc $\lambda = \dfrac{1}{20} = 0{,}05$.

La probabilité que son attente dépasse les 10 minutes est égale à

$P_{T\geqslant 20}(T \geqslant 30) = P(T \geqslant 10) = \text{e}^{-0{,}05\times 30} = \text{e}^{-1{,}5} = \text{e}^{-\frac{1}{2}}$: réponse A.

Question 3

La variable $D' = \dfrac{D-65}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

On a $P\left(\dfrac{63{,}5-65{,}1}{\sigma}\right) \leqslant P(D') \leqslant P\left(\dfrac{66{,}7-65{,}1}{\sigma}\right) = 0{,}99$.

De $P\left(\dfrac{-1{,}6}{\sigma}\right) = 0{,}000\,5$, la calculatrice donne $\sigma \approx 0{,}62$: réponse C.

Question 4

$f(x) = 2\times\dfrac{2x}{x^2+1}$; on reconnait une primitive F de f : $F(x) = 2\ln\left(x^2+1\right)$.

L'aire de la surface hachurée est donc égale (en unité d'aire) à :

$\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\text{d}x = [F(x)-F(0)]_0^2 = 2\ln\left(2^2+1\right) - 2\ln\left(0^2+1\right) = 2\ln 5$.

La droite d'équation $x = a$ partage la surface en deux surfaces; les deux surfaces obtenues ont la même aire si :

$\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^2 f(x)\,\mathrm{d}x \iff F(a)-F(0) = F(2)-F(a) \iff 2F(a) = F(0)+F(2) \iff 2\ln\left(a^2+1\right) = 2\ln 1 + 2\ln 5 \iff 2\ln\left(a^2+1\right) = \ln 5 \iff \ln\left[\left(a^2+1\right)\right]^2 = \ln 5 \iff \left(a^2+1\right)^2 = 5 \iff a^2+1 = \sqrt{5} \iff a^2 = \sqrt{5}-1 \iff$ (puisque $a > 0$) $a = \sqrt{\sqrt{5}-1}$. Réponse B.

Exercice 4 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Avec $a = 2{,}9$ il semble que la suite (u_n) soit décroissante et convergente vers 1.
Avec $a = 3{,}1$ il semble que la suite (u_n) soit croissante et tende vers $+\infty$.

2. **a.** Les termes u_n et u_{n+1} ayant pour limite ℓ, on a donc $\ell = \dfrac{1}{2}\ell - \ell + \dfrac{3}{2}$.

b. $\ell = \dfrac{1}{2}\ell - \ell + \dfrac{3}{2} \iff 2\ell = \ell^2 - 2\ell + 3 \iff \ell^2 - 4\ell + 3 = 0$
1 est solution évidente de cette équation que l'on peut écrire $(\ell-1)(\ell-3) = 0$.
L'autre solution est donc $\ell = 3$.
Si elle converge cela ne peut être que vers 1 ou 3.

3. **a.** On prend $a = 2{,}9$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = x - 1$; donc $f'(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 1$: la fonction f est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

b. *Initialisation* : $u_0 = 2{,}9$ et u_1 : $\dfrac{1}{2} \times 2{,}9^2 - 2{,}9 + \dfrac{3}{2} = 2{,}805$.
On a bien $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$.
Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbf{N}$, on ait : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$:
puisque la fonction f est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$, les images par f des trois termes de cet encadrement sont rangées dans le même ordre :
$f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$.
Soit avec $f(1) = \dfrac{1}{2} - 1 + \dfrac{3}{2} = 1$: $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.
On a montré que l'encadrement est vrai au rang 0 et que s'il est vrai au rang n, il l'est aussi au rang $n+1$.
D'après le principe de récurrence on a donc démontré que :
pour tout entier naturel n, on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

c. D'après le résultat précédent la suite (u_n) décroit et est minorée par 1 : elle est donc, d'après le théorème de la convergence monotone, convergente vers un nombre $\ell \geqslant 1$.
De plus $a = 2{,}9$ est le premier terme de la suite qui est décroissante, donc $\ell < 2{,}9$.
Les deux seules valeurs possibles pour la limite sont 1 et 3 (question 2.b.) ; ça ne peut pas être 3 donc $\ell = 1$.

4. **a.** Si la suite est majorée, comme elle est croissante, elle est convergente (théorème de la convergence monotone).
On a vu que si la suite converge ce ne peut être que vers 1 ou 3, ce qui n'est pas possible puisque le premier terme est $u_0 = 3{,}1 > 3$ et que la suite est croissante : cette suite n'est donc pas majorée.

b. Par conséquent on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

c.

```
P ← 0
U ← 3,1

Tant que U ⩽ 10^6
    P ← P + 1
    U ← (1/2)U² − U + 3/2
Fin Tant que
```

Rem. L'algorithme s'arrête à u_9.

Exercice 4 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1,\ u_1 = 6$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n.$$

1.
- $u_2 = 6u_1 - 8u_0 = 36 - 8 = 28$;
- $u_3 = 6u_2 - 8u_1 = 6 \times 28 - 8 \times 6 = 168 - 48 = 120$.

2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $AU_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ -8u_n + 6u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = U_{n+1}$.

3. **a.** On montre par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $A^n = 2^n B + 4^n C$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $2^0 B + 4^0 C = B + C = \begin{pmatrix} 2-1 & -0,5+0,5 \\ 4-4 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$: la relation est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons que pour $n \in \mathbf{N}$, $A^n = 2^n B + 4^n C$. On a

$A^{n+1} = A^n \times A = (2^n B + 4^n C) \times A = 2^n BA + 4^n CA$. Or

$BA = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$ et $CA = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -16 & 8 \end{pmatrix}$, d'où

$A^{n+1} = 2^n \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} + 4^n \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -16 & 8 \end{pmatrix}$ soit en factorisant 2 dans la première matrice et 4 dans la seconde :

$A^{n+1} = 2^{n+1} \begin{pmatrix} 2 & -0,5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + 4^{n+1} \begin{pmatrix} -1 & 0,5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ et enfin

$A^{n+1} = 2^{n+1} B + 4^{n+1} C$: la relation est vraie au rang $n+1$.

On a montré que la relation est vraie au rang 0 et que si elle est vraie au rang n elle l'est aussi au rang $n+1$; on a donc démontré par le principe de récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = 2^n B + 4^n C$.

b. On a $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, donc

$U_n = A^n U_0 = (2^n B + 4^n C) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$;

or $2^n B + 4^n C = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & -2^{n-1} \\ 2^{n+2} & -2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4^n & 2 \times 4^{n-1} \\ -4^{n+1} & 2 \times 4^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 4^n & -2^{n-1} + 2 \times 4^{n-1} \\ 2^{n+2} - 4^{n+1} & -2^n + 2 \times 4^n \end{pmatrix}$.

Donc : $U_n = A^n U_0 = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 4^n & -2^{n-1} + 2 \times 4^{n-1} \\ 2^{n+2} - 4^{n+1} & -2^n + 2 \times 4^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

D'où en prenant le premier terme :
$u_n = 2^{n+1} - 4^n + 6\left(-2^{n-1} + 2 \times 4^{n-1}\right) = 2^{n+1} - 4^n - 3 \times 2^n + 3 \times 4^n = 2 \times 2^n - 3 \times 2^n - 4^n + 3 \times 4^n$
$= 2 \times 4^n - 2^n$.

Partie B

1. Calculons $2^n\left(2^{n+1} - 1\right) = 2^{2n+1} - 2^n = 2 \times 2^{2n} - 2^n = 2 \times 4^n - 2^n = u_n$ (d'après la question précédente).

2. **a.** L'algorithme permet pour une valeur naturelle de N de dire si le nombre u_N est parfait ou non.

N	P	U	S	Affichage final
0	1	1	1	non
1	3	6	12	oui
2	7	28	56	oui
3	15	120	360	non
4	31	496	992	oui
5	63	2 016	6 552	non
6	127	8 128	16 256	oui

b. Il semble que u_P soit parfait lorsque P est un naturel premier ; dans ce cas l'algorithme affiche « oui ».

3. **a.** On sait que $u_n = 2^n p_n$ et que p_n est un nombre premier.
Les diviseurs de u_n sont donc les diviseurs de 2^n, de p_n, ou leurs produits :
ce sont donc $2^0, 2^1, \ldots, 2^n, 2^0 \times p_n, 2^1 \times p_n, \ldots, 2^n \times p_n$.
Leur somme est

$$S_n = \left(2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n\right) + \left(2^0 \times p_n + 2^1 \times p_n + \cdots + 2^n \times p_n\right)$$
$$= \left(2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n\right) + \left(2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n\right) p^n = \left(1 + p_n\right)\left(2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n\right)$$
$$= (1 + p_n) \times 2^0 \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = \left(1 + p_n\right)\left(2^{n+1} - 1\right) = \left(1 + p_n\right) p_n$$

b. On a $p_n = 2^{n+1} - 1 \iff p_n + 1 = 2^{n+1}$, donc :
$S_n = \left(1 + p_n\right) p_n = 2^{n+1} \times p_n = 2 \times 2^n p_n = 2u_n$.
Donc u_n est parfait si p_n est un naturel premier.