

EXERCICE 1

5 points

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

L'exploitant d'une forêt communale décide d'abattre des arbres afin de les vendre, soit aux habitants, soit à des entreprises. On admet que :

- parmi les arbres abattus, 30 % sont des chênes, 50 % sont des sapins et les autres sont des arbres d'essence secondaire (ce qui signifie qu'ils sont de moindre valeur) ;
- 45,9 % des chênes et 80 % des sapins abattus sont vendus aux habitants de la commune ;
- les trois quarts des arbres d'essence secondaire abattus sont vendus à des entreprises.

Partie A

Parmi les arbres abattus, on en choisit un au hasard.

On considère les événements suivants :

- C : « l'arbre abattu est un chêne » ;
- S : « l'arbre abattu est un sapin » ;
- E : « l'arbre abattu est un arbre d'essence secondaire » ;
- H : « l'arbre abattu est vendu à un habitant de la commune ».

1. Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.
2. Calculer la probabilité que l'arbre abattu soit un chêne vendu à un habitant de la commune.
3. Justifier que la probabilité que l'arbre abattu soit vendu à un habitant de la commune est égale à 0,5877.
4. Quelle est la probabilité qu'un arbre abattu vendu à un habitant de la commune soit un sapin ? On donnera le résultat arrondi à  $10^{-3}$ .

Partie B

Le nombre d'arbres sur un hectare de cette forêt peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant une loi normale d'espérance  $\mu = 4000$  et d'écart-type  $\sigma = 300$ .

1. Déterminer la probabilité qu'il y ait entre 3 400 et 4 600 arbres sur un hectare donné de cette forêt. On donnera le résultat arrondi à  $10^{-3}$ .
2. Calculer la probabilité qu'il y ait plus de 4 500 arbres sur un hectare donné de cette forêt. On donnera le résultat arrondi à  $10^{-3}$ .

Partie C

L'exploitant affirme que la densité de sapins dans cette forêt communale est de 1 sapin pour 2 arbres. Sur une parcelle, on a compté 106 sapins dans un échantillon de 200 arbres. Ce résultat remet-il en cause l'affirmation de l'exploitant ?

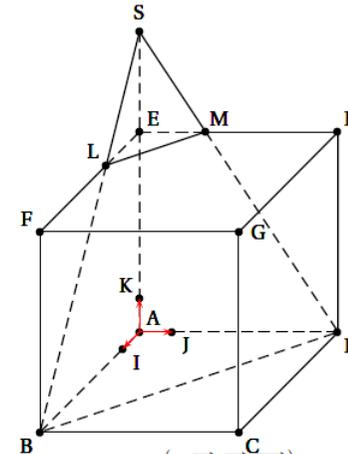
EXERCICE 2

5 points

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 mètres d'arête.

Ces deux solides sont représentés par le cube ABCDEFGH et par le tétraèdre SELM ci-dessous.



On munit l'espace du repère orthonormé  $(A; \vec{AI}, \vec{AJ}, \vec{AK})$  tel que :  $I \in [AB]$ ,  $J \in [AD]$ ,  $K \in [AE]$  et  $AI = AJ = AK = 1$ , l'unité graphique représentant 1 mètre.

Les points L, M et S sont définis de la façon suivante :

- L est le point tel que  $\vec{FL} = \frac{2}{3} \vec{FE}$  ;
- M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH) ;
- S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK).

1. Démontrer, sans calcul de coordonnées, que les droites (LM) et (BD) sont parallèles.
2. Démontrer que les coordonnées du point L sont  $(2 ; 0 ; 6)$ .
3. a. Donner une représentation paramétrique de la droite (BL).  
b. Vérifier que les coordonnées du point S sont  $(0 ; 0 ; 9)$ .
4. Soit  $\vec{n}$  le vecteur de coordonnées  $(3 ; 3 ; 2)$ .  
a. Vérifier que  $\vec{n}$  est normal au plan (BDL).  
b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDL) est :

$$3x + 3y + 2z - 18 = 0.$$

- c. On admet que la droite (EH) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = s \quad (s \in \mathbb{R}) \\ z = 6 \end{cases}$$

Calculer les coordonnées du point M.

5. Calculer le volume du tétraèdre SELM. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule suivante :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}.$$

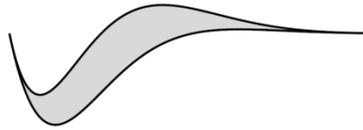
6. L'artiste souhaite que la mesure de l'angle  $\widehat{SLE}$  soit comprise entre  $55^\circ$  et  $60^\circ$ . Cette contrainte d'angle est-elle respectée ?

**EXERCICE 3**

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

5 POINTS

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \text{ et } g(x) = -e^{-x} \cos x.$$

On admet que les fonctions  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

**Partie A — Étude de la fonction  $f$**

1. Justifier que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}.$$

2. En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

3. Démontrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = e^{-x}(2\cos x - 1)$  où  $f'$  est la fonction dérivée de  $f$ .

4. Dans cette question, on étudie la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-\pi; \pi]$ .

a. Déterminer le signe de  $f'(x)$  pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $[-\pi; \pi]$ .

b. En déduire les variations de  $f$  sur  $[-\pi; \pi]$ .

**Partie B — Aire du logo**

On note  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  les représentations graphiques des fonctions  $f$  et  $g$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . L'unité graphique est de 2 centimètres. Ces deux courbes sont tracées en ANNEXE.

1. Étudier la position relative de la courbe  $\mathcal{C}_f$  par rapport à la courbe  $\mathcal{C}_g$  sur  $\mathbb{R}$ .

2. Soit  $H$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

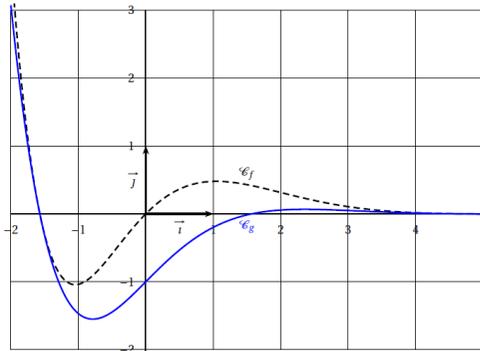
$$H(x) = \left( -\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1 \right) e^{-x}.$$

On admet que  $H$  est une primitive de la fonction  $x \mapsto (\sin x + 1)e^{-x}$  sur  $\mathbb{R}$ .

On note  $\mathcal{D}$  le domaine délimité par la courbe  $\mathcal{C}_f$ , la courbe  $\mathcal{C}_g$  est les droites d'équation  $x = -\frac{\pi}{2}$  et  $x = \frac{3\pi}{2}$ .

a. Hachurer le domaine  $\mathcal{D}$  sur le graphique en annexe à rendre avec la copie.

b. Calculer, une unité d'aire, l'aire du domaine  $\mathcal{D}$ , puis en donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près en  $\text{cm}^2$ .



**EXERCICE 4**

CANDIDATS N'AYANT PAS SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

5 POINTS

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1<sup>er</sup> juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1<sup>er</sup> juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1<sup>er</sup> novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite  $(u_n)$ . Selon ce modèle, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  désigne le nombre de cétacés au 1<sup>er</sup> juin de l'année 2017 +  $n$ . On a donc  $u_0 = 3000$ .

1. Justifier que  $u_1 = 2926$ .
2. Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 0,95u_n + 76$ .
3. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite  $(u_n)$ . Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
2	$u_n$	3000	2926	2856	2789	2725	2665	2608	2553

Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite  $(u_n)$  ?

4. a. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq 1520$ .  
b. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.  
c. Justifier que la suite  $(u_n)$  est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.
5. On désigne par  $(v_n)$  la suite définie par, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = u_n - 1520$ .  
a. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.  
b. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520$ .  
c. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .
6. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

```

n ← 0
u ← 3000
Tant que ...
    n ← ...
    u ← ...
Fin de Tant que
    
```

La notation « ← » correspond à une affectation de valeur, ainsi «  $n \leftarrow 0$  » signifie « Affecter à  $n$  la valeur 0 ».

7. La réserve marine fermera-t-elle un jour? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.