EXERCICE 4 **5 POINTS**

CANDIDATS AYANT SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le droit de pêche dans une réserve marine est réglementé : chaque pêcheur doit posséder une carte d'accréditation annuelle. Il existe deux types de cartes :

- une carte de pêche dite « libre » entre parenthèse le pêcheur mais pas limité en nombre de poissons pêchés) ;
- une carte de pêche dite « avec quota » (le pêcheur ne doit pas dépasser une certaine quantité hebdomadaire de poisson).

On suppose que le nombre total de pêcheurs reste constant d'année en année.

On note, pour l'année $2017+n$:

- ℓ_n la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche libre ;
- q_n la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche avec quota.

On observe que :

- chaque année, 65 % des possesseurs de la carte de pêche libres achète de nouveaux une carte de pêche libre l'année suivante ;
- Chaque année, 45 % des possesseurs de la carte de pêche avec quota acheté une carte de pêche libre l'année suivante ;
- En 2017, 40 % des pêcheurs ont acheté une carte de pêche libre. On a donc $\ell_0 = 0{,}4$ et $q_0 = 0{,}6$.

On note, pour tout entier naturel n, $\mathrm{P}_n = \begin{pmatrix}\ell_n\\ q_n\end{pmatrix}$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{MP}_n$, où M est la matrice carrée $\begin{pmatrix}0{,}65 & 0{,}45\\ 0{,}35 & 0{,}55\end{pmatrix}$.

2. Calculer la proportion de pêcheurs achetant une carte de pêche avec quota en 2019.

3. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1 ○	M := {{0,65, 0,45}, {0,35, 0,55}} ✓ $\mathrm{M} := \begin{pmatrix}0.65 & 0.45\\ 0.35 & 0.55\end{pmatrix}$
2 ○	P_0 := {{0.4}, {0.6}} ✓ $\mathrm{P}_0 := \begin{pmatrix}0.4\\ 0.6\end{pmatrix}$
3 ○	Q := {{9, 1}, {7,-1}} ✓ $\mathrm{Q} := \begin{pmatrix}9 & 1\\ 7 & -1\end{pmatrix}$
4 ○	T := {{1/16, 1/16}, {7/16,-9/16}} ✓ $\mathrm{T} := \begin{pmatrix}\frac{1}{16} & \frac{1}{16}\\ \frac{7}{16} & -\frac{9}{16}\end{pmatrix}$

5 ○	TQ $\to \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
6 ○	QT $\to \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
7 ○	D := TMQ $\to \mathrm{D} := \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$

En vous appuyant sur les résultats précédents, répondre aux deux questions suivantes :

a. Justifier que Q est une matrice inversible et préciser sa matrice inverse.
On notera Q^{-1} la matrice inverse de Q.

b. Justifier que $\mathrm{M} = \mathrm{QDQ}^{-1}$ et démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$\mathrm{M}^n = \mathrm{QD}^n\mathrm{Q}^{-1}.$$

4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\mathrm{M}^n = \frac{1}{16}\begin{pmatrix}9+7\times 0{,}2^n & 9-9\times 0{,}2^n\\ 7-7\times 0{,}2^n & 7+9\times 0{,}2^n\end{pmatrix}.$$

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $\mathrm{P}_n = \mathrm{M}^n\mathrm{P}_0$.

b. Justifier que, pour tout entier naturel n :

$$\ell_n = \frac{9}{16} - \frac{13}{80}\times 0{,}2^n.$$

5. La proportion de pêcheurs achetant la carte de pêche libre dépassera-t-elle 60 % ?