Baccalauréat S Centres étrangers 11 juin 2018

Exercice I — 4 points

Pour tous les candidats

Dans une usine, on se propose de tester un prototype de hotte aspirante pour un local industriel.
Avant de lancer la fabrication en série, on réalise l'expérience suivante : dans un local clos équipé du prototype de hotte aspirante, on diffuse du dioxyde de carbone (CO_2) à débit constant.
Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en minute.
À l'instant $t = 0$, la hotte est mise en marche et on la laisse fonctionner pendant 20 minutes. Les mesures réalisées permettent de modéliser le taux (en pourcentage) de CO_2 contenu dans le local au bout de t minutes de fonctionnement de la hotte par l'expression $f(t)$, où f est la fonction définie pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;20]$ par :

$$f(t) = (0{,}8t + 0{,}2)\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}03.$$

On donne ci-contre le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;20]$.
Ainsi, la valeur $f(0) = 0{,}23$ traduit le fait que le taux de CO_2 à l'instant 0 est égal à 23 %.

t	0		1,75		20
$f'(t)$		+	0	−	
f	0,23	↗		↘	

1. Dans cette question, on arrondira les deux résultats au millième.
   a. Calculer $f(20)$.
   b. Déterminer le taux maximal de CO_2 présent dans le local pendant l'expérience.
2. On souhaite que le taux de CO_2 dans le local retrouve une valeur V inférieure ou égale à 3,5 %.
   a. Justifier qu'il existe un unique instant T satisfaisant cette condition.
   b. On considère l'algorithme suivant :

```
t ← 1,75
p ← 0,1
V ← 0,7
Tant que V > 0,035
    t ← t + p
    V ← (0,8t + 0,2)e^(−0,5t) + 0,03
Fin Tant que
```

   Quelle est la valeur de la variable t à la fin de l'algorithme?
   Que représente cette valeur dans le contexte de l'exercice?
3. On désigne par V_m le taux moyen (en pourcentage) de CO_2 présent dans le local pendant les Il premières minutes de fonctionnement de la hotte aspirante.
   a. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;11]$ par :

$$F(t) = (-1{,}6t - 3{,}6)\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}03t.$$

   Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;11]$.
   b. En déduire le taux moyen V_m, valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;11]$. Arrondir le résultat au millième, soit à 0,1 %.

Exercice II — 4 points

Pour tous les candidats

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse inexacte ou non justifiée ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. Un type d'oscilloscope a une durée de vie, exprimée en année, qui peut être modélisée par une variable aléatoire D qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
   On sait que la durée de vie moyenne de ce type d'oscilloscope est de 8 ans.

   Affirmation 1 : pour un oscilloscope de ce type choisi au hasard et ayant déjà fonctionné 3 ans, la probabilité que la durée de vie soit supérieure ou égale à 10 ans, arrondie au centième, est égale à 0,42.

   On rappelle que si X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, on a pour tout réel t positif : $P(X \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
2. En 2016, en France, les forces de l'ordre ont réalisé 9,8 millions de dépistages d'alcoolémie auprès des automobilistes, et 3,1 % de ces dépistages étaient positifs.
   Source : *OFDT (Observatoire Français des Drogues et des Toxicomanies)*
   Dans une région donnée, le 15 juin 2016, une brigade de gendarmerie a effectué un dépistage sur 200 automobilistes.

   Affirmation 2 : en arrondissant au centième, la probabilité que, sur les 200 dépistages, il y ait eu strictement plus de 5 dépistages positifs, est égale à 0,59.
3. On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\ln(6x - 2) + \ln(2x - 1) = \ln(x).$$

   Affirmation 3 : l'équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.
4. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\left(4z^2 - 20z + 37\right)(2z - 7 + 2\mathrm{i}) = 0.$$

   Affirmation 4 : les solutions de l'équation sont les affixes de points appartenant à un même cercle de centre le point P d'affixe 2.

Exercice III — 7 points

Pour tous les candidats

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.

Partie A

Le détaillant constate que ses melons se vendent bien lorsque leur masse est comprise entre 900 g et 1 200 g. Dans la suite, de tels melons sont qualifiés « conformes ».
Le détaillant achète ses melons auprès de trois maraîchers, notés respectivement A, B et C.
Pour les melons du maraîcher A, on modélise la masse en gramme par une variable aléatoire M_A qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[850\,;\,x]$, où x est un nombre réel supérieur à 1 200.

La masse en gramme des melons du maraîcher B est modélisée par une variable aléatoire M_B qui suit une loi normale de moyenne 1 050 et d'écart-type inconnu σ.
Le maraîcher C affirme, quant à lui, que 80 % des melons de sa production sont conformes.

1. Le détaillant constate que 75 % des melons du maraîcher A sont conformes. Déterminer x.
2. Il constate que 85 % des melons fournis par le maraîcher B sont conformes.
   Déterminer l'écart-type σ de la variable aléatoire M_B. En donner la valeur arrondie à l'unité.
3. Le détaillant doute de l'affirmation du maraîcher C. Il constate que sur 400 melons livrés par ce maraîcher au cours d'une semaine, seulement 294 sont conformes.
   Le détaillant a-t-il raison de douter de l'affirmation du maraîcher C ?

Partie B

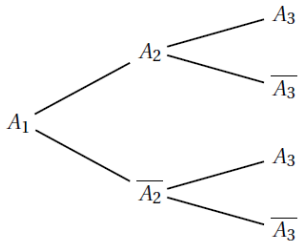
Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

— parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;

— parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine n ».
On a ainsi $p(A_1) = 1$.

1. **a.** Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, relatif aux trois premières semaines.
   b. Démontrer que $p(A_3) = 0,85$.
   c. Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 ?
   Arrondir au centième.



Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.
3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n > 0,8$.
   b. Démontrer que la suite (p n) est décroissante.
   c. La suite (p_n) est-elle convergente ?
4. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = p_n - 0,8$.
   a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme v_1 et la raison.
   b. Exprimer v_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.
   c. Déterminer la limite de la suite (p_n).

Exercice IV — 5 points

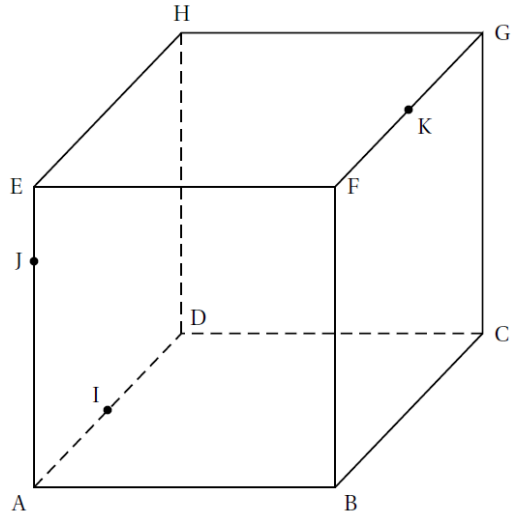
Candidats n'ayant pas suivi la spécialité mathématique

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH.
Les trois points I, J, K sont définis par les conditions suivantes :

— I est le milieu du segment [AD] ;

— J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$;

— K est le milieu du segment [FG].



Partie A

1. Sur la figure donnée en annexe, construire sans justifier le point d'intersection P du plan (IJK) et de la droite (EH). On laissera les traits de construction sur la figure.
2. En déduire, en justifiant, l'intersection du plan (IJK) et du plan (EFG).

Partie B

On se place désormais dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. **a.** Donner sans justification les coordonnées des points I, J et K.
   b. Déterminer les réels a et b tels que le vecteur $\overrightarrow{n}(4 ; a ; b)$ soit orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.
   c. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est : $4x - 6y - 4z + 3 = 0$.
2. **a.** Donner une représentation paramétrique de la droite (CG).
   b. Calculer les coordonnées du point N, intersection du plan (IJK) et de la droite (CG).
   c. Placer le point N sur la figure et construire en couleur la section du cube par le plan (IJK).

Partie C

On note R le projeté orthogonal du point F sur le plan (IJK). Le point R est donc l'unique point du plan (IJK) tel que la droite (FR) est orthogonale au plan (IJK).

On définit l'intérieur du cube comme l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ tels que $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \\ 0 < z < 1 \end{cases}$

Le point R est-il à l'intérieur du cube ?

Exercice VI — 5 points

Candidats ayant suivi la spécialité mathématique

Le but de cet exercice est d'envisager une méthode de cryptage à clé publique d'une information numérique, appelée système RSA, en l'honneur des mathématiciens Ronald Rivest, Adi Shamir et Leonard Adleman, qui ont inventé cette méthode de cryptage en 1977 et l'ont publiée en 1978.

Les questions 1 et 2 sont des questions préparatoires, la question 3 aborde le cryptage, la question 4 le décryptage.

1. Cette question envisage de calculer le reste dans la division euclidienne par 55 de certaines puissances de l'entier 8.

a. Vérifier que $8^7 \equiv 2 \mod 55$.

En déduire le reste dans la division euclidienne par 55 du nombre 8^{21}.

b. Vérifier que $8^2 \equiv 9 \mod 55$, puis déduire de la question a. le reste dans la division euclidienne par 55 de 8^{23}.

2. Dans cette question, on considère l'équation (E) $23x - 40y = 1$, dont les solutions sont des couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs.

a. Justifier le fait que l'équation (E) admet au moins un couple solution.

b. Donner un couple, solution particulière de l'équation (E).

c. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

d. En déduire qu'il existe un unique entier d vérifiant les conditions $0 \leqslant d < 40$ et $23d \equiv 1 \mod 40$.

3. Cryptage dans le système RSA

Une personne A choisit deux nombres premiers p et q, puis calcule les produits $N = pq$ et $n = (p-1)(q-1)$. Elle choisit également un entier naturel c premier avec n.

La personne A publie le couple $(N\,;\,c)$, qui est une clé publique permettant à quiconque de lui envoyer un nombre crypté.

Les messages sont numérisés et transformés en une suite d'entiers compris entre 0 et $N-1$.

Pour crypter un entier a de cette suite, on procède ainsi : on calcule le reste b dans la division euclidienne par N du nombre a^c, et le nombre crypté est l'entier b.

Dans la pratique, cette méthode est sûre si la personne A choisit des nombres premiers p et q très grands, s'écrivant avec plusieurs dizaines de chiffres.

On va l'envisager ici avec des nombres plus simples : $p = 5$ et $q = 11$.

La personne A choisit également $c = 23$.

a. Calculer les nombres N et n, puis justifier que la valeur de c vérifie la condition voulue.

b. Un émetteur souhaite envoyer à la personne A le nombre $a = 8$.

Déterminer la valeur du nombre crypté b.

4. Décryptage dans le système RSA

La personne A calcule dans un premier temps l'unique entier naturel d vérifiant les conditions $0 \leqslant d < n$ et $cd \equiv 1 \mod n$.

Elle garde secret ce nombre d qui lui permet, et à elle seule, de décrypter les nombres qui lui ont été envoyés cryptés avec sa clé publique.

Pour décrypter un nombre crypté b, la personne A calcule le reste a dans la division euclidienne par N du nombre bd, et le nombre en clair – c'est-à-dire le nombre avant cryptage – est le nombre a.

On admet l'existence et l'unicité de l'entier d, et le fait que le décryptage fonctionne.

Les nombres choisis par A sont encore $p = 5$, $q = 11$ et $c = 23$.

a. Quelle est la valeur de d ?

b. En appliquant la règle de décryptage, retrouver le nombre en clair lorsque le nombre crypté est $b = 17$.