Corrigé du baccalauréat S Nouvelle Calédonie mars 2019

Durée : 4 heures

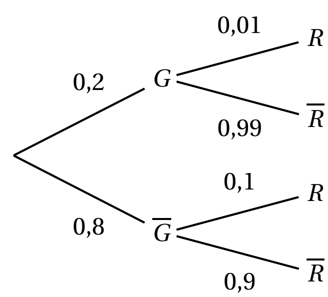
Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

1. **a.**



b. L'évènement est $G \cap R$, donc sa probabilité est :
$p(G \cap R) = p(G) \times p_G(R) = 0,2 \times 0,01 = 0,002$.

c. On a de même : $p\left(\overline{G} \cap R\right) = p\left(\overline{G}\right) \times p_{\overline{G}}(R) = 0,8 \times 0,1 = 0,08$.
D'après la loi des probabilités totales :
$p(R) = p(G \cap R) + p\left(\overline{G} \cap R\right) = 0,002 + 0,08 = 0,082$.

d. Il faut trouver $p_R(G) = \dfrac{p(G \cap R)}{p(R)} = \dfrac{0,002}{0,082} \approx 0,0024$ soit 0,002 au millième près.

2. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le coût d'entretien d'une voiture.
On va chercher le coût moyen par voiture, soit l'espérance mathématique de X.
Il y a 3 événements à considérer :

- G qui correspond à une voiture sous garantie dont la probabilité est 0,2 et qui nécessite 0 € de dépense ;
- $\overline{G} \cap \overline{R}$ qui correspond à une voiture qui n'est plus sous garantie mais qui ne nécessite pas de réparation, dont la probabilité est $0,8 \times 0,9 = 0,72$ et qui nécessite 100 € de dépense ;
- $\overline{G} \cap R$ qui correspond à une voiture qui n'est plus sous garantie mais qui nécessite une réparation, dont la probabilité est 0,02 et qui nécessite $100 + 400 = 500$ € de dépense.

La loi de probabilité de X est :

événement	G	$\overline{G} \cap \overline{R}$	$\overline{G} \cap R$
coût x_i	0 €	100 €	500 €
probabilité $p_i = P(X = x_i)$	0,2	0,72	0,08

$E(X) = \sum x_i \times p_i = 0 + 100 \times 0,72 + 500 \times 0,08 = 72 + 40 = 112$
Chaque voiture coûte en moyenne 112 € ; il y a 2 500 voitures, ce qui fait une dépense totale de $112 \times 2500 = 280000$ €.
Conclusion : le budget de 250 000 € sera insuffisant.

Partie B

1. Avec $p = 0{,}80$ et $n = 600$, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est

$$I_{600} = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p\,(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p\,(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}8 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}8\times 0{,}2}}{\sqrt{600}}\ ;\ 0{,}8 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}8\times 0{,}2}}{\sqrt{600}}\right]$$

$\approx \left[0{,}768\ ;\ 0{,}832\right]$.

2. Pour les 600 derniers contrats la fréquence de contrats de courte durée est égale à $f = \dfrac{550}{600} \approx 0{,}917$.
Or $0{,}917 \notin I_{600}$, donc, au risque de 5 %, l'affirmation de la directrice n'est pas correcte.

Partie C

1. On doit trouver $p(500 \leqslant Y \leqslant 600)$; la calculatrice donne $\approx 0{,}241\,7$, soit 0,242 au millième près.
2. La calculatrice donne pour $p(Y \leqslant a) = 0{,}15$, $a \approx 346$ km.

Exercice 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x-4} - 2.$$

1. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x+2) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x-4} = +\infty$, donc par produit de limites :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

2. On a $g(x) = x\mathrm{e}^{x-4} + 2\mathrm{e}^{x-4} - 2 = x\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-4} + 2\mathrm{e}^{x-4} - 2$.
On sait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$; donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-4}x\mathrm{e}^{x} = 0$
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x-4} = 0$, donc par somme de limites : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = -2$.
3. $g'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{x-4} + (x+2) \times 1 \times \mathrm{e}^{x-4} = \mathrm{e}^{x-4}(1 + x + 2) = \mathrm{e}^{x-4}(x+3)$.
On sait que quel soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x-4} > 0$; le signe de $g'(x)$ est donc celui de $x+3$ qui s'annule pour $x = -3$ est positif pour $x > -3$ et négatif pour $x < -3$, d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	$\searrow$	$\approx -2{,}001$	$\nearrow$	$+\infty$

On a $g(-3) = (-3+2)\mathrm{e}^{-3-4} - 2 = -\mathrm{e}^{-7} - 2 \approx -2{,}001$.

4. D'après le tableau de variations : sur l'intervalle $]-3\ ;\ +\infty[$, $f(-3) < 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
La fonction g étant continue sur cet intervalle car dérivable sur ce même intervalle ; il existe donc un réel unique α, $\alpha \in]-3\ ;\ +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

5. Conclusion :
   - $g(\alpha) = 0$;
   - sur $]-\infty~;~\alpha[$, $g(x) < 0$;
   - sur $]\alpha~;~+\infty[$, $g(x) > 0$
6. La calculatrice donne $g(3{,}069) \approx -0{,}002006$ et $g(3{,}070) \approx 0{,}00038$, donc $\alpha \approx 3{,}070$ à 10^{-3} près.

Partie B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - x^2\text{e}^{x-4}.$$

1. $f(x) = 0 \iff x^2 - x^2\text{e}^{x-4} = 0 \iff x^2\left(1 - \text{e}^{x-4}\right) = 0 \iff \left\{\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ 1 - \text{e}^{x-4} = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ 1 = \text{e}^{x-4} \end{array}\right. \iff$ $\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ 0 = x - 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ 4 = x \end{array}\right.$

   L'équation a deux solutions : 0 et 4.
2. De la question 5 de la partie A on déduit que :
   - $f'(\alpha) = 0$;
   - $f'(x) < 0$ sur $]-\infty~;~0[$;
   - $f'(x) > 0$ sur $[0~;~\alpha[$;
   - $f'(x) < 0$ sur $]\alpha~;~+\infty[$.

   La fonction est donc croissante sur $[0~;~\alpha[$ et décroissante sur $]-\infty~;~0[$ et sur $]\alpha~;~+\infty[$.

   On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2\text{e}^{x-4} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

   $f(0) = 0$;

   $f(\alpha) = \alpha^2 - \alpha^2\text{e}^{\alpha-4}$;

   $f(x) = x^2\left(1 - \text{e}^{x-4}\right)$.

   Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{e}^{x-4} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 - \text{e}^{x-4} = -\infty$; d'autre part $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et par produit de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

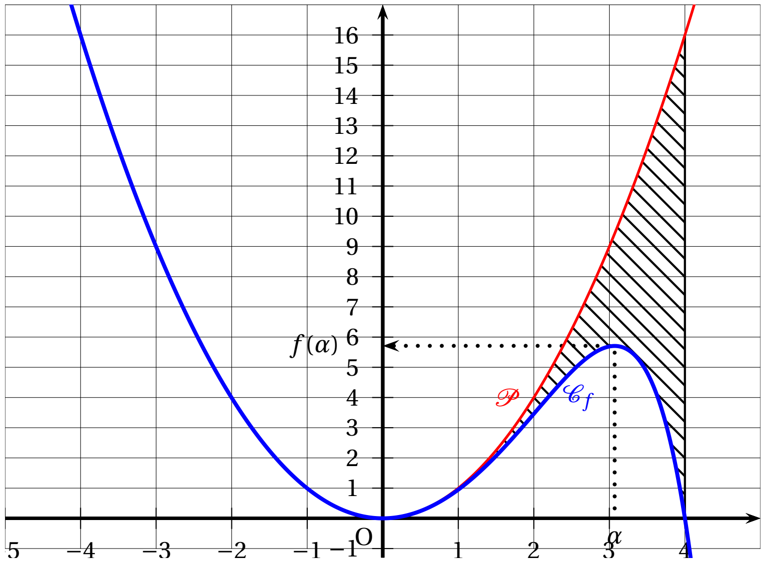
   Conclusion : la fonction est décroissante $]-\infty~;~0[$ de plus l'infini à zéro croissante sur $[0~;~\alpha[$ de zéro à $f(\alpha)$ puis décroissante sur $]\alpha~;~+\infty[$ de $f(\alpha)$ à moins l'infini.
3. D'après la question précédente sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ la fonction est croissante puis décroissante : $f(\alpha)$ est donc le maximum de la fonction sur cet intervalle.

   On a vu à la question **A. 3.** que α est le réel tel que $g(\alpha) = 0 \iff (\alpha + 2)\text{e}^{\alpha-4} - 2 = 0 \iff$ $(\alpha + 2)\text{e}^{\alpha-4} = 2 \iff \text{e}^{\alpha-4} = \dfrac{2}{\alpha + 2}$.

   Donc $f(\alpha) = \alpha^2\left(1 - \text{e}^{x-4}\right) = \alpha^2\left(1 - \dfrac{2}{\alpha + 2}\right) = \alpha^2\left(\dfrac{\alpha + 2 - 2}{\alpha + 2}\right) = \alpha^2 \times \dfrac{\alpha}{\alpha + 2}$.

   Finalement $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^3}{\alpha + 2} \approx 5{,}71$

Partie C : Aire d'un domaine



1. Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$d(x) = x^2 - f(x) = x^2 - \left(x^2 - x^2\text{e}^{x-4}\right) = x^2\text{e}^{x-4}$.
Cette fonction produit de deux fonctions positives est positive et ne s'annule que pour $x = 0$.
Géométriquement ceci montre que la parabole $\mathscr{P}$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$, le seul point commun étant l'origine.

2. On admet qu'une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est définie par : $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - \left(x^2 - 2x + 2\right)\text{e}^{x-4}$.

On a vu à la question précédente que sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ la courbe $\mathscr{P}$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$, donc l'aire de la surface limitée par la courbe $\mathscr{P}$, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 4$, est en unité d'aire égale à l'intégrale :

$$\mathscr{A} = \int_0^4 \left[x^2 - f(x)\right]\,\text{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - F(x)\right]_0^4 = \left[\frac{4^3}{3} - \left(\frac{4^3}{3} - \left(4^2 - 2\times 4 + 2\right)\text{e}^{4-4}\right)\right] - \left[0 - \left(0 - 2\text{e}^{0-4}\right)\right]$$
$$= 10 - 2\text{e}^{-4} \text{ (u. a.)}$$

Exercice 3 **4 points**

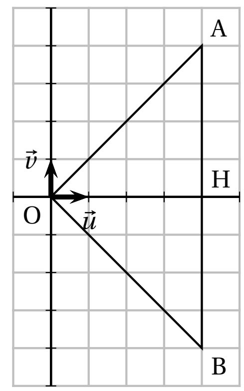
Commun à tous les candidats

Pour les questions 1 à 3, on se place dans un plan muni du repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$.

1. Soit (E) l'équation d'inconnue le nombre complexe z : $z\left(z^2 - 8z + 32\right) = 0$.
Affirmation 1 : Les points dont les affixes sont les solutions de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle d'aire égale à 16 unités d'aire.

On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $z\left(z^2-8z+32\right)=0$.

- $z=0$ ou
- $z^2-8z+32=0$; $\Delta=(-8)^2-4\times1\times32=-64=-8^2$
  Cette équation a donc deux solutions
  $z_1=\dfrac{-b+\text{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}=\dfrac{8+8\text{i}}{2}=4+4\text{i}$ et $z_2=4-4\text{i}$.



Soient A et B les points d'affixes respectives z_1 et z_2.
Le triangle OAB est isocèle en O et a pour aire $\mathscr{A}=\dfrac{\text{OH}\times\text{AB}}{2}$
où H est le milieu de $[\text{AB}]$.
Le point H a pour affixe $\dfrac{z_1+z_2}{2}=4$ donc $\text{OH}=4$.
$\text{AB}=\left|(4+4\text{i})-(4-4\text{i})\right|=\left|8\text{i}\right|=8$; donc $\mathscr{A}=\dfrac{4\times8}{2}=16$.

Affirmation 1 vraie

2. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points dont les affixes z vérifient $\left|z-3\right|=\left|z+3\right|$.
Affirmation 2 : L'ensemble $\mathscr{E}$ est le cercle de centre O et de rayon 3.

Soient M, A et B les points d'affixes respectives z, 3 et -3.
$\left|z-3\right|=\text{MA}$ et $\left|z+3\right|=\text{MB}$; donc $\left|z-3\right|=\left|z+3\right| \iff \text{MA}=\text{MB}$.
L'ensemble $\mathscr{E}$ est donc une droite, la médiatrice de $[\text{AB}]$.

Affirmation 2 fausse

3. On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie pour tout n par : $z_n=\left(1-\text{i}\sqrt{3}\right)^n$.
Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n.
Affirmation 3 : Pour tout entier naturel n, les points M_n, O et M_{n+3} sont alignés.

On sait que $\left(\overrightarrow{\text{OM}_{n+3}},\overrightarrow{\text{OM}_n}\right)=\arg\left(\dfrac{z_{\text{M}_{n+3}}-z_\text{O}}{z_{\text{M}_n}-z_\text{O}}\right)$

donc $\left(\overrightarrow{\text{OM}_{n+3}},\overrightarrow{\text{OM}_n}\right)=\arg\left(\dfrac{\left(1+\text{i}\sqrt{3}\right)^{n+3}}{\left(1+\text{i}\sqrt{3}\right)^n}\right)=\arg\left(\left(1+\text{i}\sqrt{3}\right)^3\right)=\arg(-8)=\pi\quad[2\pi]$.

On en déduit que les trois points M_n, O et M_{n+3} sont alignés.

Affirmation 3 vraie

4. On considère l'équation d'inconnue le nombre réel x : $\sin(x)\left(2\cos^2(x)-1\right)=0$.
Affirmation 4 : Cette équation admet exactement quatre solutions sur l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ qui sont : $-\dfrac{\pi}{4}$; 0 ; $\dfrac{\pi}{4}$ et π.

$\dfrac{3\pi}{4}\in\left]-\pi\ ;\ \pi\right]$; or $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $2\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)-1=0$.
On en déduit que $\dfrac{3\pi}{4}$ est une solution de l'équation mais ce n'est pas une des quatre solutions proposées.

Affirmation 4 fausse

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) à valeurs réelles définie par $u_0 = 1$ et, pour tout n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 8}$.

Partie A : Conjectures

Les premières valeurs de la suite (u_n) ont été calculées à l'aide d'un tableur dont voici une capture d'écran :

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	0,111 111 11
4	2	0,013 698 63
5	3	0,001 709 4
6	4	0,000 213 63
7	5	2,670 3E−05
8	6	3,337 9E−06
9	7	4,172 3E−07
10	8	5,215 4E−08
11	9	6,519 3E−09
12	10	8,149 1E−10

1. La formule à entrer dans la cellule `B3` et à copier vers le bas pour obtenir les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) est `= B2 / (B2 + 8)`
2. La suite (u_n) semble décroissante.
3. La suite (u_n) semble converger vers 0.
4. On écrit un algorithme calculant u_{30} :

Variables	i entier et u réel
Initialisation	u prend la valeur 1
Traitement	Pour i variant de 1 à 30
	u prend la valeur $\dfrac{u}{u+8}$
	Fin pour
Sortie	Afficher u

Partie B : Étude générale

1. On va démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 0$.

   - Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = 1 > 0$; donc la propriété est vraie au rang 0.
   - On suppose la propriété vraie pour un rang n quelconque, c'est-à-dire que $u_n > 0$.
     $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 8}$
     Or $u_n > 0$ donc $u_n + 8 > 0$ donc $\dfrac{u_n}{u_n + 8} > 0$; on a donc démontré que $u_{n+1} > 0$.
   - On a vérifié que la propriété était vraie pour $n = 0$. On a démontré que la propriété était héréditaire pour tout $n \geqslant 0$. Donc, d'après le principe de récurrence, on peut dire que la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

   On a donc démontré que $u_n > 0$ pour tout n.

2. Pour tout n : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n}{u_n+8}-u_n=u_n\left(\dfrac{1}{u_n+8}-1\right)=u_n\left(\dfrac{1-u_n-8}{u_n+8}\right)=\dfrac{u_n\left(-u_n-7\right)}{u_n+8}$
Pour tout n, on a $u_n>0$ donc $u_n+8>0$ et $-u_n-7<0$.
On en déduit que $\dfrac{u_n\left(-u_n-7\right)}{u_n+8}<0$ et donc que $u_{n+1}-u_n<0$.
La suite (u_n) est donc décroissante.
3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.
Donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

Partie C : Recherche d'une expression du terme général

On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n, $v_n=1+\dfrac{7}{u_n}$.

On en déduit que $v_n-1=\dfrac{7}{u_n}$ donc que $u_n=\dfrac{7}{v_n-1}$.

1. • $v_{n+1}=1+\dfrac{7}{u_{n+1}}=1+\dfrac{7}{\dfrac{u_n}{u_n+8}}=1+\dfrac{7\left(u_n+8\right)}{u_n}=1+\dfrac{7u_n}{u_n}+\dfrac{56}{u_n}=1+7+\dfrac{56}{\dfrac{7}{v_n-1}}=8+8\left(v_n-1\right)$
$=8+8v_n-8=8v_n$
• $v_0=1+\dfrac{7}{u_0}=1+\dfrac{7}{1}=8$
Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q=8$ et de premier terme $v_0=8$.
2. On déduit de la question précédente que, pour tout n, $v_n=v_0\times q^n=8\times 8^n=8^{n+1}$.
Or $u_n=\dfrac{7}{v_n-1}$, donc, pour tout n, on a $u_n=\dfrac{7}{8^{n+1}-1}$.
3. $8>1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}8^{n+1}=+\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\dfrac{7}{8^{n+1}-1}=0$ ce qui veut dire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.
4. On cherche dans cette question le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, $u_n<10^{-18}$.
On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=0$; donc, d'après la définition de la limite d'une suite, on peut dire qu'à partir d'un certain rang n_0, tous les termes de la suite seront dans l'intervalle $\left]-10^{-18}\,;\,10^{-18}\right[$.
Comme $u_n>0$ pour tout n, on peut dire qu'il existe un rang n_0 tel que, pour $n>n_0$, on ait $u_n<10^{-18}$.
On résout l'inéquation $u_n<10^{-18}$.
$$\begin{aligned}u_n<10^{-18} &\iff \dfrac{7}{8^{n+1}-1}<10^{-18} \iff 7<10^{-18}\left(8^{8n+1}-1\right) \iff 7\times10^{18}+1<8^{n+1}\\ &\iff \ln\left(7\times10^{18}+1\right)<\ln\left(8^{n+1}\right) \iff \ln\left(7\times10^{18}+1\right)<(n+1)\ln(8)\\ &\iff \dfrac{\ln\left(7\times10^{18}+1\right)}{\ln(8)}<n+1 \iff n>\dfrac{\ln\left(7\times10^{18}+1\right)}{\ln(8)}-1\end{aligned}$$
Or $n>\dfrac{\ln\left(7\times10^{18}+1\right)}{\ln(8)}-1\approx 19{,}87$ donc c'est à partir de $n_0=20$ que $u_n<10^{-18}$.