Math93.com

Baccalauréat 2019 - S
Correction Liban

Série S Obligatoire et spécialité

Mai 2019

Pour être prévenu dès la sortie des sujets et corrigés :

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. Fonctions — 5 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1. *On considère la fonction f définie sur l'intervalle]0; 1] par :* $f(x) = x(1-\ln x)^2$.

1. a. Déterminer une expression de la dérivée de f et vérifier que pour tout $x \in]0\,;\,1]$, $f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1)$.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccl}]0\,;\,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x \times (1-\ln x)^2 \end{array} \right.$$

La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,1]$.
La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in]0\,;\,1]\,;\ f(x) = u(x) \times v(x) \quad : \quad \left\{ \begin{array}{lcl} u(x) = x & ; & u'(x) = 1 \\ v(x) = (1-\ln x)^2 & ; & v'(x) = 2(1-\ln x) \times \left(-\dfrac{1}{x}\right) \end{array} \right.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0\,;\,1],\ f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ f'(x) &= 1 \times (1-\ln x)^2 + x \times 2(1-\ln x) \times \left(-\frac{1}{x}\right) \\ f'(x) &= (1-\ln x)^2 - 2(1-\ln x) \\ f'(x) &= (\ln x - 1)^2 + 2(\ln x - 1) \\ f'(x) &= (\ln x - 1) \times \left[\ln x - 1 + 2\right] \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in]0\,;\,1]\,;\ f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1)}$$

1. b. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0;\,1]$ (on admettra que la limite de la fonction f en 0 est nulle).

On étudie le signe de chacun des facteurs de la fonction dérivée sur $]0\,;\,1]$.

$$\begin{cases}\ln x+1=0 \iff x=\mathrm{e}^{-1}\in]0\,;\,1]\\ \ln x+1>0 \iff x>\mathrm{e}^{-1} \text{ et } x\in]0\,;\,1]\end{cases}$$

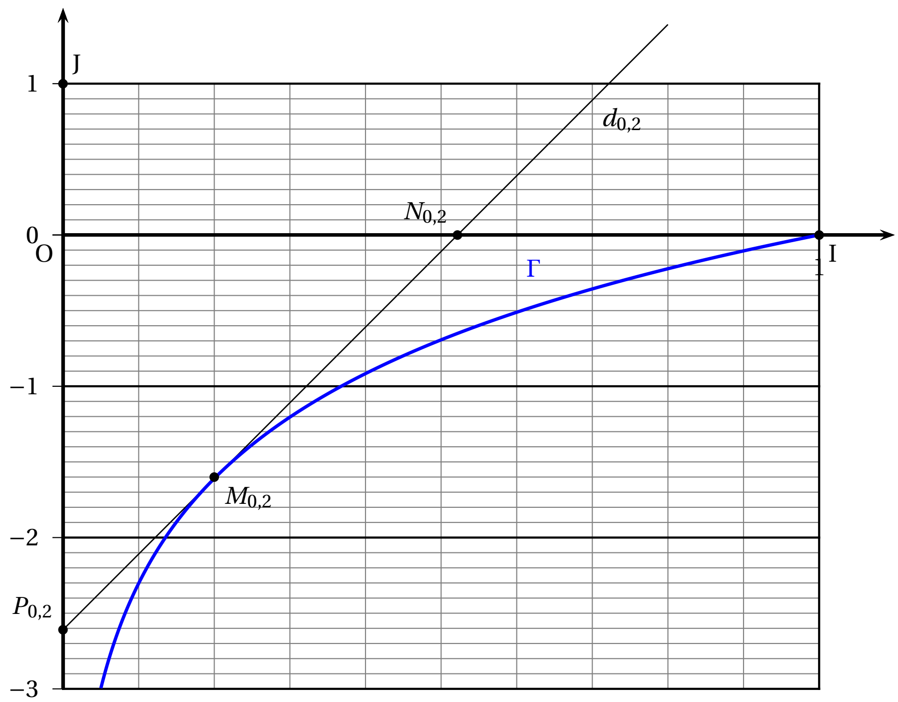
$$\begin{cases}\ln x-1=0 \iff x=\mathrm{e}^{1}\notin]0\,;\,1]\\ \ln x-1>0 \iff x>\mathrm{e}^{1} \text{ et } x\in]0\,;\,1]\end{cases}$$

$$f(x)=x(1-\ln x)^2$$

x	0		e^{-1}		1
Signe de $(\ln x+1)$	||	$-$	0	$+$	
Signe de $(\ln x-1)$	||	$-$		$-$	
Signe de $f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
Variations de f	|| 0	$\nearrow$	$4\,\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	1

On note Γ la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $]0;\,1]$ par $g(x)=\ln x$. Soit a un réel de l'intervalle $]0;\,1]$. On note M_a le point de la courbe Γ d'abscisse a et d_a la tangente à la courbe Γ au point M_a. Cette droite d_a coupe l'axe des abscisses au point N_a et l'axe des ordonnées au point P_a. On s'intéresse à l'aire du triangle ON_aP_a quand le réel a varie dans l'intervalle $]0;\,1]$.

2. *Dans cette question, on étudie le cas particulier où $a=0,2$ et on donne la figure ci-dessous.*



2. a. Déterminer graphiquement une estimation de l'aire du triangle O$N_{0,2}P_{0,2}$ en unités d'aire.

Graphiquement en unités d'aire :

$$\boxed{\mathscr{A}\left(ON_{0,2}P_{0,2}\right) \approx \frac{0,52\times 2,6}{2} = 0,676}$$

2. b. Déterminer une équation de la tangente $d_{0,2}$.

On a g définie sur $]0\,;\,1]$ par $g(x) = \ln x$, de dérivée $x \longrightarrow \dfrac{1}{x}$. L'équation de la tangente (T) á la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $a = 0,2$ est $(T)\ :\ y = g'(a)(x-a)+g(a)$.

Donc ici on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ll} g(0,2) & = +\ln 0,2 \\ g'(0,2) & = 5 \end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow\ (T)\ :\ y = 5\times(x-0,2)\ +\ln 0,2 \implies \boxed{y = 5x+\ln 0,2-1}$$

2. c. Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle O$N_{0,2}P_{0,2}$.

- Le point $P_{0,2}$, intersection de la tangente avec l'axe des ordonnées a donc pour coordonnées : $P_{0,2}\ (0\,;\,\ln 0,2-1)$.
- Le point $N_{0,2}$, intersection de la tangente avec l'axe des abscisses a donc pour coordonnées : $N_{0,2}\left(\dfrac{1-\ln(0,2)}{5}\,;\,0\right)$.
- Donc la valeur exacte de l'aire est :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}\left(ON_{0,2}P_{0,2}\right) &= \frac{ON_{0,2}\times OP_{0,2}}{2} \\ &= \frac{\left|\dfrac{1-\ln(0,2)}{5}\right|\times|\ln 0,2-1|}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}\left(ON_{0,2}P_{0,2}\right) = \frac{\left(1-\ln 0,2\right)^2}{10}}$$

Dans ce qui suit, on admet que, pour tout réel a de l'intervalle]0; 1], l'aire du triangle ON_aP_a *en unités d'aire est donnée par* $\mathscr{A}(a) = \dfrac{1}{2}a(1-\ln a)^2$.

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de a l'aire $\mathscr{A}(a)$ est maximale. Déterminer cette aire maximale.

On rappelle que f est définie sur $]0\,;\,1]$ par : $f(x) = x(1-\ln x)^2$.

On admet que, pour tout réel a de l'intervalle $]0;\,1]$, l'aire du triangle ON_aP_a en unités d'aire est donnée par : $\mathscr{A}(a) = \dfrac{1}{2}a(1-\ln a)^2$ donc :

$$\mathscr{A}(a) = \frac{1}{2}f(a)$$

D'après l'étude des variations de f menée lors de la question (1.b), on peut affirmer que l'aire est donc maximale pour $a = e^{-1}$ et elle vaut alors en unités d'aire :

$$\boxed{\frac{1}{2}f\left(e^{-1}\right) = 2e^{-1}}$$

Exercice 2. Complexes 4 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ *d'unité 2 cm. On appelle f la fonction qui, à tout point M, distinct du point 0 et d'affixe un nombre complexe z, associe le point M' d'affixe z' tel que* $z' = -\dfrac{1}{z}$.

1. *On considère les points A et B d'affixes respectives* $z_A = -1 + i$ *et* $z_B = \dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1. a. Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point A′ image du point A par la fonction f.

$$\begin{aligned} z_{A'} &= \frac{1}{z_A} = -\frac{1}{-1+\mathrm{i}} \\ &= -\frac{-1-\mathrm{i}}{(-1)^2+1^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{z_{A'} = \frac{1+\mathrm{i}}{2}}$$

1. b. Déterminer la forme exponentielle de l'affixe du point B′ image du point B par la fonction f.

$$\begin{aligned} z_{B'} &= \frac{1}{z_B} = -\frac{1}{\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}} \\ &= -2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3} \\ &= \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\pi}\,2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3} \end{aligned}$$

$$\boxed{z_{B'} = 2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}}$$

1. c. Sur la copie, placer les points A, B, A′ et B′ dans le repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. Pour les points B et B′, on laissera les traits de construction apparents.

2. *Soit r un réel strictement positif et θ un réel. On considère le complexe z défini par* $z = re^{i\theta}$.

2. a. Montrer que $z' = \dfrac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\theta)}$.

$$\begin{aligned} z' &= -\frac{1}{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \\ &= -\frac{1}{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \times \frac{1}{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \end{aligned}$$

$$\boxed{z' = \frac{1}{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\theta)}}$$

2. b. Est-il vrai que si un point M, distinct de 0, appartient au disque de centre 0 et de rayon 1 sans appartenir au cercle de centre 0 et de rayon 1, alors son image M' par la fonction f est à l'extérieur de ce disque? Justifier.

Si un point M appartient au disque de centre O et de rayon 1 sans appartenir au cercle de centre O et de rayon 1 alors $r < 1$. Donc

$$\left|z'\right| = \left|\frac{1}{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\theta)}\right| = \frac{1}{r} > 1 \text{ car } r < 1$$

Ainsi le point M' est à l'extérieur de ce disque. L'affirmation est donc vraie.

3. *Soit le cercle Γ de centre K d'affixe $z_K = -\dfrac{1}{2}$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.*

3. a. Montrer qu'une équation cartésienne du cercle Γ est $x^2 + x + y^2 = 0$.

Le point K est d'affixe $z_K = -\dfrac{1}{2}$ donc de coordonnées $K\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ 0\right)$.

$$\begin{aligned}
M(x\ ;\ y) \in \Gamma &\iff KM^2 = \frac{1}{4}\\
&\iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}\\
&\iff x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 = \frac{1}{4}\\
&\iff \underline{x^2 + x + y^2 = 0}
\end{aligned}$$

3. b. Soit $z = x + \mathrm{i}\,y$ avec x et y non tous les deux nuls. Déterminer la forme algébrique de z' en fonction de x et y.

Soit $z = x + \mathrm{i}\,y$ avec x et y non tous les deux nuls.

$$\begin{aligned}
z' &= -\frac{1}{z} = -\frac{1}{x + \mathrm{i}\,y}\\
z' &= -\frac{(x - \mathrm{i}\,y)}{(x + \mathrm{i}\,y)(x - \mathrm{i}\,y)}\\
z' &= -\frac{(x - \mathrm{i}\,y)}{x^2 + y^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{z' = \frac{-x}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\,\frac{y}{x^2 + y^2}}$$

3. c. Soit M un point, distinct de O, du cercle Γ. Montrer que l'image M' du point M par la fonction f appartient à la droite d'équation $x = 1$.

Soit $M(x\ ;\ y)$ un point, distinct de O donc x et y non tous les deux nuls. Par ailleurs puisque $M(x\ ;\ y)$ appartient au cercle Γ, d'après la question (3.a) on a :

$$x^2 + x + y^2 = 0 \iff x^2 + y^2 = -x$$

Et donc l'image M' du point M par la fonction f est d'affixe :

$$\begin{aligned}
z' &= \frac{-x}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\,\frac{y}{x^2 + y^2}\\
z' &= \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\,\frac{y}{x^2 + y^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{z' = 1 + \mathrm{i}\,\frac{y}{x^2 + y^2}}$$

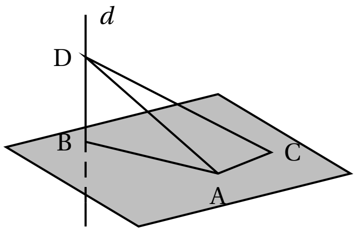
M' appartient à la droite d'équation $x = 1$.

Exercice 3. Espace — 6 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Partie A

Dans un plan P, on considère un triangle ABC rectangle en A. Soit d la droite orthogonale au plan P et passant par le point B. On considère un point D de cette droite distinct du point B.



1. **Montrer que la droite (AC) est orthogonale au plan (BAD).**

   - La droite (AC) est perpendiculaire à la droite (AB) puisque le triangle ABC rectangle en A.
   - La droite (AC) est perpendiculaire à la droite (d) puisque cette dernière est perpendiculaire au plan P, et donc à toute droite de ce plan.
   - Conclusion : la droite (AC) est perpendiculaire à (AB) et (d), deux droites sécantes du plan (BAD), donc elle est orthogonale à ce plan.

On appelle bicoin un tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles rectangles.

2. **Montrer que le tétraèdre ABCD est un bicoin.**
   ABCD est un tétraèdre dont les faces sont les triangles ABC, ABD, ACD et BDC.

   - ABC est rectangle en A.
   - Pour DBA et DBC : La droite (BD) est perpendiculaire au plan P donc à toutes les droites de ce plan. En particulier, (BD) perpendiculaire à (BA) et (BC) et donc les triangles DBA et DBC sont rectangles en B.
   - Pour ACD :
     - Méthode 1 : le triangle ABC rectangle en A donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ et (BD) perpendiculaire au plan P donc à la droite (AC) soit $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}=0$ soit :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}&=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right).\overrightarrow{AC}\\&=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}\\&=0+0\\\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}&=0\end{aligned}$$

       Donc ACD rectangle en A.
     - Méthode 2 : on a montré que la droite (AC) était orthogonale au plan (BAD) à la question 1, elle est donc orthogonale à toutes les droites du plan (BAD) et donc à la droite (AD). Le triangle ACD est rectangle en A.
   - Conclusion : ABCD est un tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles rectangles, c'est un bicoin.

3.

   3. a. Justifier que l'arête [CD] est la plus longue arête du bicoin ABCD.
   - Le triangle ABD est rectangle en B donc l'hypoténuse [AD] est plus longue que les deux autres côtés soit $AD > AB$ et $AD > BD$.
   - Le triangle ABC est rectangle en A donc de même $BC > AB$ et $BC > AC$.
   - Le triangle BCD est rectangle en B donc $DC > BD$ et $DC > BC$.
   - Le triangle ADC est rectangle en A donc $DC > AD$ et $DC > AC$.

- Conclusion : Ainsi

$$\begin{cases} DC > AD > AB \\ \text{et } DC > AC \end{cases}$$

L'arête [CD] est bien la plus longue arête du bicoin ABCD.

3. b. On note I le milieu de l'arête [CD]. Montrer que le point I est équidistant des 4 sommets du bicoin ABCD.

Le point I est le milieu de l'hypoténuse [DC] du triangle ADC rectangle en A, c'est donc le centre du cercle circonscrit à ce triangle et l'on peut écrire

$$IA = IC = ID$$

Le point I est le milieu de l'hypoténuse [DC] du triangle BCD rectangle en B, c'est donc le centre du cercle circonscrit à ce triangle et

$$IB = IC = ID$$

Ainsi

$$IA = IB = IC = ID$$

Donc le point I est équidistant des 4 sommets.

Partie B

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point $A(3\ ;\ 1\ ;\ -5)$ *et la droite* d *de représentation paramétrique* $\begin{cases} x &= 2t+1 \\ y &= -2t+9 \\ z &= t-3 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan P orthogonal à la droite d et passant par le point A.

Propriété 1

Soit vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul et un point A de l'espace. L'unique plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\ .\ \overrightarrow{u} = 0$.
Dans un repère de l'espace, son équation est alors de la forme :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix} . \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff a(x-x_A) + b\left(y-y_A\right) + c(z-z_A) = 0$$

D'après l'équation paramétrique de la droite (d), un vecteur directeur est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et puisque $A(3\ ;\ 1\ ;\ -5)$.

Donc d'après la propriété 1 :

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in P \iff \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \\ z+5 \end{pmatrix} . \overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in P \iff 2(x-3) - 2(y-1) + (z+5) = 0$$

$$\boxed{P\ :\ 2x - 2y + z + 1 = 0}$$

2. Montrer que le point d'intersection du plan P et de la droite d est le point B(5 ; 5 ; −1).

On sait que (d) n'est pas incluse dans le plan, donc on a au plus un point d'intersection. On va résoudre le système :

$$\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -2t+9 \\ z = t-3 \\ 2x-2y+z+1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -2t+9 \\ z = t-3 \\ 2(2t+1)-2(-2t+9)+t-3+1=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -2t+9 \\ z = t-3 \\ 9t=18 \end{cases}$$

Donc on obtient les coordonnées du point d'intersection :

$$t=2 \Longrightarrow \boxed{B(5\,;\,5\,;\,-1)}$$

3. Justifier que le point C(7 ; 3 ; −9) appartient au plan P puis montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

- Les coordonnées de C(7 ; 3 ; −9) vérifient l'équation du plan $P\ :\ 2x-2y+z+1=0$ donc C appartient au plan P :

$$2\times7-2\times3-9+1=14-6-9+1=0$$

- Par ailleurs dans le repère orthonormé :

$$\begin{cases} AB^2 = (5-3)^2+(5-1)^2+(-1+5)^2 = 36 \\ AC^2 = (7-3)^2+(3-1)^2+(-9+5)^2 = 36 \\ BC^2 = (7-5)^2+(3-5)^2+(-9+1)^2 = 72 \end{cases}$$

  De ce fait : $BC^2 = AB^2+AC^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

4. *Soit t un réel différent de 2 et M le point de paramètre t appartenant à la droite d.*

4. a. Justifier que le triangle ABM est rectangle.
Les points M et B appartiennent à la droite (d) d orthogonale au plan P et donc à toutes les droites de ce plan, en conséquence à la droite (AB). Ainsi le triangle ABM est rectangle en B.

4. b. Montrer que le triangle ABM est isocèle en B si et seulement si le réel t vérifie l'équation $t^2-4t=0$.

- Le point M est de paramètre t appartenant à la droite d donc $M(2t+1\ ;\ -2t+9\ ;\ t-3)$. De ce fait dans le repère orthonormé :

$$\begin{aligned} BM^2 &= (2t+1-5)^2+(-2t+9-5)^2+(t-3+1)^2 \\ &= (2t-4)^2+(-2t+4)^2+(t-2)^2 \\ &= 4t^2-16t+16+4t^2-16t+16+t^2-4t+4 \\ BM^2 &= 9t^2-36t+36 \end{aligned}$$

- On a donc :

$$\begin{aligned} AB=BM &\iff AB^2=BM^2 \text{ Car } AM \text{ et } BM \text{ sont positifs} \\ &\iff 9t^2-36t+36=36 \\ &\iff 9t^2-36t=0 \\ AB=BM &\iff t^2-4t=0 \end{aligned}$$

- Conclusion : Le triangle ABM est donc isocèle en B si, et seulement si, le réel t vérifie l'équation $t^2-4t=0$.

4. c. En déduire les coordonnées des points M_1 et M_2 de la droite d tels que les triangles rectangles ABM_1 et ABM_2 soient isocèles en B.

On a alors :

$$t^2-4t=0 \Longleftrightarrow t(t-4)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ \text{ ou } \ t=4 \end{cases} \quad \text{avec } (d) : \begin{cases} x &= 2t+1 \\ y &= -2t+9 \\ z &= t-3 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

- Si $t=0$ on a le point $M_1(1\ ;\ 9\ ;\ \ ;\ -3)$
- Si $t=4$ on obtient le point $M_2(9\ ;\ 1\ ;\ 1)$
- Conclusion : D'après les deux questions précédentes, les triangles ABM_1 et ABM_2 sont rectangles et isocèles en B.

Partie C

On donne le point D(9; 1; 1) qui est un des deux points solutions de la question ***4. c.*** *de la partie B. Les quatre sommets du tétraèdre ABCD sont situés sur une sphère.*

En utilisant les résultats des questions des parties A et B précédentes, déterminer les coordonnées du centre de cette sphère et calculer son rayon.

- D'après la question (A3.b) : I le milieu de l'arête [CD] est équidistant des 4 sommets du bicoin ABCD. C'est donc le centre de la sphère, et les coordonnées de I sont :

$$\begin{cases} C(7\,;\,3\,;\,-9) \\ D(9\,;\,1\,;\,1) \end{cases} \Longrightarrow \boxed{I\left(\frac{7+9}{2}\,;\,\frac{1+3}{2}\,;\,\frac{1-9}{2}\right)}$$

- Le rayon est alors en unités de longueur :

$$\begin{aligned} R &= IA \\ &= \sqrt{(8-3)^2+(1-2)^2+(-5+4)^2} \\ &= \sqrt{25+1+1} \\ &= \sqrt{27} \\ IA &= \underline{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

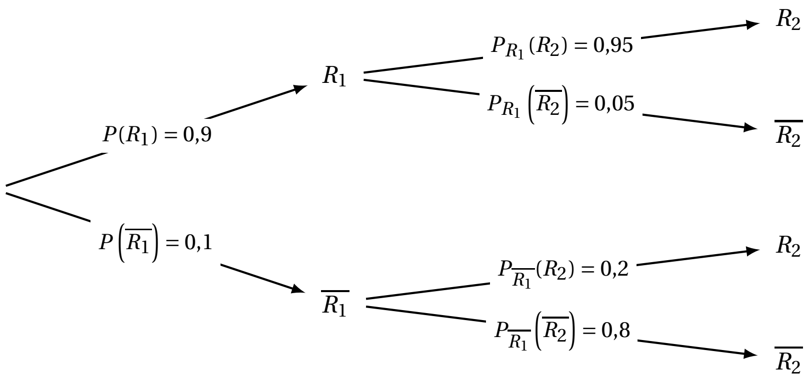
Exercice 4. Obligatoire : Probabilités — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide. On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant. Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants : à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est $0,9$ *; si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est* $0,95$ *; si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est* $0,2$. *On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel n non nul, on note* R_n *l'évènement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n-ième semaine ».*

1.

1. a. Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les évènements R_1 et R_2.



1. b. Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.

La probabilité cherchée est :

$$P(R_1 \cap R_2) = 0,9 \times 0,95 = \underline{0,855}$$

1. c. Montrer que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est égale à $0,875$.

Les évènement R_1 et $\overline{R_1}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(R_2) &= P(R_1 \cap R_2) + P\left(\overline{R_1} \cap R_2\right) \\ &= 0,855 + 0,1 \times 0,2 \\ P(R_2) &= \underline{0,875} \end{aligned}$$

La probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est égale à $0,875$.

1. d. Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine ? On arrondira le résultat à 10^{-3}.

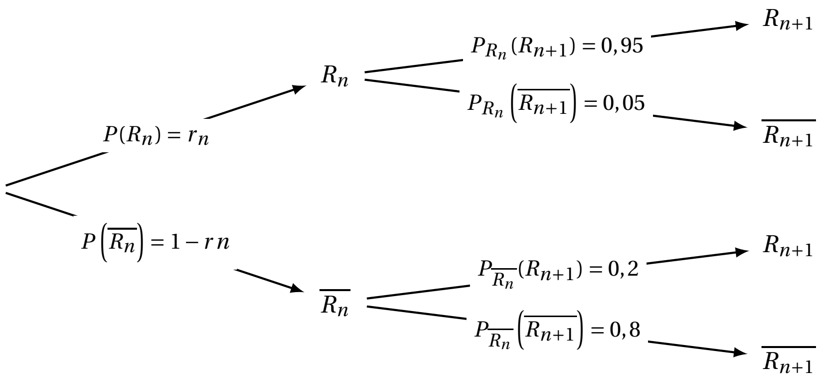
On cherche :

$$\begin{aligned} P_{R_2}(R_1) &= \frac{P\left(R_2 \cap \overline{R_1}\right)}{P(R_2)} \\ &= \frac{0,02}{0,875} \\ P_{R_2}(R_1) &\approx \underline{0,023} \end{aligned}$$

Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine est 0,023.

2. *Pour tout entier naturel n non nul, on note r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n-ième semaine. On a alors $r_n = p(R_n)$.*

2. a. Recopier et compléter l'arbre pondéré (aucune justification n'est attendue) :



2. b. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
r_{n+1} &= P(R_{n+1}) \\
&= P(R_n \cap R_{n+1}) + P\left(\overline{R_n} \cap R_{n+1}\right) \\
&= 0,95r_n + 0,2(1 - r_n) \\
&= 0,95r_n + 0,2 - 0,2r_n \\
r_{n+1} &= \underline{0,75r_n + 0,2}
\end{aligned}$$

2. c. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$.
Notons pour tout entier naturel $n \geq 1$ le postulat

$$(P_n) : \ r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 1$, le postulat (P_1) est vrai puisque :
  - d'une part : $r_1 = p(R_1) = 0,9$;
  - d'autre part pour $n = 1$ on a :

$$0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8 = 0,1 \times 0,75^{1-1} + 0,8 = 0,9$$

- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n + 1$.
  On a montré que :

$$r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$$

  On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que : (P_n) soit vérifié et donc que

$$r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$$

$$\begin{aligned}
r_{n+1} &= 0,75r_n + 0,2 \\
&= 0,75 \times \left(0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8\right) + 0,2 \\
&= 0,1 \times 0,75^n + 0,8 \times 0,75 + 0,2 \\
r_{n+1} &= \underline{0,1 \times 0,75^n + 0,8}
\end{aligned}$$

  On a alors montré que $r_{n+1} = 0,1 \times 0,75^n + 0,8$ et donc que (P_{n+1}) est vrai.
- **Conclusion**
  On a montré que (P_1) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geq 1$.

$$\boxed{r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8}$$

2. d. Calculer la limite de la suite (r_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Théorème 1

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Ici $-1 < q = 0,75 < 1$ et d'après le théorème 2 on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,75)^n = 0$. Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} 0,1 \times (0,75)^{n-1} = 0 \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} \Big(\underbrace{0,1 \times (0,75)^{n-1} + 0,8}_{r_n}\Big) = 0,8$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (r_n) :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} r_n = 0{,}8}$$

Sur le long terme, la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier est 0,8.

Exercice 4. Spécialité : Matrices et suites 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans un jardin public, un artiste doit installer une œuvre aquatique commandée par la mairie. Cette œuvre sera constituée de deux bassins A et B ainsi que d'une réserve filtrante R. Au départ, les deux bassins contiennent chacun 100 litres d'eau. Un système de canalisations devra alors permettre de réaliser, toutes les heures et dans cet ordre, les transferts d'eau suivants : dans un premier temps, la moitié du bassin A se vide dans la réserve R ; ensuite, les trois quarts du bassin B se vident dans le bassin A ; enfin, on rajoute 200 litres d'eau dans le bassin A et 300 litres d'eau dans le bassin B. Une étude de faisabilité du projet amène à étudier la contenance des deux bassins A et B qui est à prévoir pour éviter tout débordement. On modélise les quantités d'eau des deux bassins A et B à l'aide de deux suites (a_n) et (b_n) : plus précisément pour tout entier naturel n, on note a_n et b_n les quantités d'eau en centaines de litres qui seront respectivement contenues dans les bassins A et B au bout de n heures. On suppose pour cette étude mathématique que les bassins sont a priori suffisamment grands pour qu'il n'y ait pas de débordement. Pour tout entier naturel n, on note U_n la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Ainsi $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n + C$ où $M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,75 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Pour n entier naturel :

- Dans un premier temps, la moitié du bassin A se vide dans la réserve R soit $0,5a_n$
- ensuite, les trois quarts du bassin B se vident dans le bassin A donc

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,75b_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 0,25b_n$$

- enfin, on rajoute 200 litres d'eau dans le bassin A et 300 litres d'eau dans le bassin B donc pour n entier :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,5a_n + 0,75b_n + 2 \\ b_{n+1} = 0,25b_n + 3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5a_n + 0,75b_n \\ 0,25b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\iff U_{n+1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,75 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{U_{n+1} = MU_n + C}$$

2. *On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.*

2. a. Calculer P^2. En déduire que la matrice P est inversible et préciser sa matrice inverse.

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_2$$

Donc P inversible et $\underline{P^{-1} = P}$

2. b. Montrer que PMP est une matrice diagonale D que l'on précisera.

$$PMP = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 0,75 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$PMP = \begin{pmatrix} 0,5 & 1,5 \\ 0 & -0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{PMP = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix} = D}$$

2. c. Calculer PDP.

$$PDP = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$PDP = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,75 \\ 0 & -0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{PDP = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,75 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix} = M}$$

2. d. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $M^n = PD^nP$.

Notons pour tout entier naturel $n \geq 0$ le postulat

$$(P_n)\ :\ M^n = PD^nP$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, le postulat (P_0) est vrai puisque :
  – D'une part $M^0 = Id_2$;
  – d'autre part d'après la question (2.a.) $PD^0P = P\,Id_2\,P = PP = Id_2$
- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$.

  $$M^{n+1} = M^n \times M$$

  On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que : (P_n) soit vérifié et donc que $M^n = PD^nP$. Par ailleurs dans la question (2c) on a montré que $PDP = M$ donc :

  $$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M \\ M^{n+1} &= PD^nP \times PDP \\ M^{n+1} &= PD^nP^2DP \quad \text{on a vu question (2.a.) que } \ P^2 = Id \\ M^{n+1} &= PD^n Id_2 DP \\ M^{n+1} &= PD^nDP \\ M^{n+1} &= PD^{n+1}P \end{aligned}$$

  On a alors montré que $M^{n+1} = PD^{n+1}P$ et donc que (P_{n+1}) est vrai.
- **Conclusion**
  On a montré que (P_0) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geq 0$.

  $$\boxed{M^n = PD^nP}$$

On admet par la suite que pour tout entier naturel n, $M^n = \begin{pmatrix} 0,5^n & 3\times 0,5^n - 3\times 0,25^n \\ 0 & 0,25^n \end{pmatrix}$.

3. Montrer que la matrice $X = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ vérifie $X = MX + C$.

$$\begin{aligned} MX + C &= \begin{pmatrix} 0,5 & 0,75 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ MX + C &= \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice $X = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ vérifie $\underline{X = MX + C}$.

4. *Pour tout entier naturel n, on définit la matrice V_n par $V_n = U_n - X$.*

4. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = MV_n$.
Pour tout entier naturel n, on sait que $U_{n+1} = MU_n + C$ donc

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} - X \\ V_{n+1} &= MU_n + C - X \end{aligned}$$

Or d'après la question (3.) $X = MX + C$

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= MU_n + C - (MX + C) \\ V_{n+1} &= MU_n - MX \\ V_{n+1} &= M(U_n - X) \\ V_{n+1} &= MV_n \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n, $\boxed{V_{n+1} = MV_n}$.

4. b. On admet que, pour tout entier naturel non nul n, $V_n = M^n V_0$.
Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $U_n = \begin{pmatrix} -18 \times 0,5^n + 9 \times 0,25^n + 10 \\ -3 \times 0,25^n + 4 \end{pmatrix}$.
Pour tout entier naturel non nul n, $V_n = U_n - X$ donc on a

$$V_0 = U_0 - X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} U_n &= V_n + X \\ U_n &= M^n V_0 + X \\ U_n &= \begin{pmatrix} 0,5^n & 3 \times 0,5^n - 3 \times 0,25^n \\ 0 & 0,25^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} \\ U_n &= \begin{pmatrix} -9 \times 0,5^n - 9 \times 0,5^n + 9 \times 0,25^n \\ -3 \times 0,25^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{U_n = \begin{pmatrix} -18 \times 0,5^n + 9 \times 0,25^n + 10 \\ -3 \times 0,25^n + 4 \end{pmatrix}}$$

5.

5. a. Montrer que la suite (b_n) est croissante et majorée. Déterminer sa limite.
D'après la question précédente, pour n entier on a :

$$\begin{cases} a_n = -18 \times 0,5^n + 9 \times 0,25^n + 10 \\ b_n = -3 \times 0,25^n + 4 \end{cases}$$

- Croissance :
  Pour n entier on a :

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= -3 \times 0,25^{n+1} + 4 - (-3 \times 0,25^n + 4) \\ b_{n+1} - b_n &= -3 \times 0,25^{n+1} + 3 \times 0,25^n \\ b_{n+1} - b_n &= 3 \times 0,25^n \times \left(-0,25 + 1 \right) \\ b_{n+1} - b_n &= 2,25 \times 0,25^n > 0 \end{aligned}$$

  Donc la suite (b_n) est croissante.

- Majoration :
  Pour tout entier n on a :
  $$-3\times 0,25^n < 0 \Longrightarrow -3\times 0,25^n + 4 < 4 \Longrightarrow b_n < 4$$
  Donc la suite (b_n) est majorée par 4.
- Limite.

Théorème 2

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Ici $-1 < q = 0,25 < 1$ et d'après le théorème 2 on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,25)^n = 0$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} -3\times(0,25)^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(-3\times(0,25)^n+4\right)}_{b_n} = 4$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (b_n) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = 4}$$

5. b. Déterminer la limite de la suite (a_n).
On a pour tout entier n :
$$a_n = -18\times 0,5^n + 9\times 0,25^n + 10$$
Donc
$$\begin{cases} -1 < 0,5 < 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = 0 \\ -1 < 0,25 < 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} 0,25^n = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} -18\times 0,5^n + 9\times 0,25^n + 10 = 10$$
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 10}$$
La suite (a_n) tend vers 10.

5. c. On admet que la suite (a_n) est croissante. En déduire la contenance des deux bassins A et B qui est à prévoir pour la faisabilité du projet, c'est-à-dire pour éviter tout débordement.
La contenance des deux bassins A et B qui est à prévoir pour la faisabilité du projet, c'est-à-dire pour éviter tout débordement est donc de 1 000 litres pour A et 400 pour B.

Fin du devoir