Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Polynésie 19 juin 2019

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les probabilités demandées seront arrondies à 0,01.

1. **a.** On sait que $\mathrm{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda} = 10 \iff \lambda = \dfrac{1}{10} = 0,1$.

   b. On a $P(X \leqslant 6) = 1 - \mathrm{e}^{-0,1\times 6} \approx 0,451$ soit 0,45 au centième près. Donc $P(X \geqslant 6) \approx 1 - 0,45$ soit 0,55.

   c. La loi est sans vieillissement donc :
   $P_{X\geqslant 6}(X \geqslant 12) = P_{X\geqslant 6}(X \geqslant 6+6 = P(X \geqslant 6) \approx 0,55$ (question précédente).

   d. t vérifie l'équation :
   $P(X > t) = 0,05 \iff \mathrm{e}^{-0,1t} = 0,05 \iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien)
   $-0,1t = \ln 0,05 \iff t = -10 \times \dfrac{\ln 0,05}{\approx} 29,95$, soit 30 mois environ.

2. **a.** On a $P(55 \leqslant M \leqslant 65) = P(\mu - 2\sigma \leqslant M \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$ (résultat connu sur la loi normale).

   b. Il faut trouver m tel que $P(M \geqslant m) \geqslant 0,99 \iff P(M \leqslant m) \leqslant 0,01$.
   La calculatrice (grâce à la fonction inverse loi normale) fournit $m \approx 54$.

3. Le commerçant fait l'hypothèse que la proportion d'acheteurs de glace à la vanille sera $p = \dfrac{2}{3}$ et il utilise un échantillon de taille $n = 120$.
   Les conditions :
   - $n = 120 \geqslant 5$;
   - $np = 120 \times \dfrac{2}{3} = 80 \geqslant 5$;
   - $nn(1-p) = 120 \times \dfrac{1}{3} = 40 \geqslant 5$

   permettent l'établissement d'un intervalle de fluctuation :

   $$I = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[\tfrac{2}{3} - 1,96\sqrt{\frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}}{120}}\ ;\ \tfrac{2}{3} + 1,96\sqrt{\frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}}{120}}\right] =$$
   $$\left[\tfrac{2}{3} - 1,96\sqrt{\frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}}{120}}\ ;\ \tfrac{2}{3} + 1,96\sqrt{\frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}}{120}}\right].$$

   On obtient $I \approx [0,58\ ;\ 0,76]$.
   Or la fréquence observée sur l'échantillon est $f = \frac{65}{120} \approx 0,54$.
   Comme $0,54 \notin I$, avec un risque d'erreur de 5 %, l'hypothèse du commerçant doit être remise en cause.

Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

$$(H) : f(1) = 0 \qquad f'(1) = 0,25 \quad \text{et} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty.$$

1. Si $f(x) = ax^2+bx+c$, avec a, b, c réels, on a $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = c$ ce qui contredit la troisième condition : f n'est donc pas un trinôme du second degré.
2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par $g(x) = k\ln x$.
   a. Avec $g'(x) = \dfrac{k}{x}$ sur $]0\,;\,1]$ on a
   $$\left\{\begin{array}{lcl} g(1) & = & 0\\ g'(1) & = & 0,25\\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) & = & -\infty\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} k\ln 1 & = & 0\\ \dfrac{k}{1} & = & 0,25\\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{k}{x} & = & -\infty\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 0 & = & 0\\ k & = & 0,25\\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 0,25\ln x & = & -\infty\end{array}\right.$$
   Les trois conditions sont remplies par la fonction g définie sur $[0\,;\,1]$ par $g(x) = 0,25\ln x$.
   b. On a $g(0,5) = 0,25\ln 0,5 \approx -0,17$ et sur C le point d'abscisse 0,5 a pour ordonnée $-0,75$ environ. Donc la courbe représentative de la fonction g ne coïncide pas avec la courbe C.

   Avec $h'(x) = -\dfrac{4a}{x^5} + b$, on a
   $$\left\{\begin{array}{lcl} h(1) & = & 0\\ h'(1) & = & 0,25\\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) & = & -\infty\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a+b & = & 0\\ -4a+b & = & 0,25\\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{a}{x^4}+bx & = & -\infty\end{array}\right.$$
   Par différence des deux premières équations on trouve $5a = -0,25 = -\dfrac{1}{4} \iff a = -\dfrac{1}{20}$ et la première équation donne $b = \dfrac{1}{20}$.
   On a bien $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{a}{x^4} = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} bx = 0$, donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = -\infty$.
   Conclusion la fonction h définie sur $]0\,;\,1]$ par $h(x) = -\dfrac{1}{20x^4} + \dfrac{x}{20}$ vérifie les trois conditions.

Partie B

$$f(x) = \frac{1}{20}\left(x - \frac{1}{x^4}\right).$$

1. La fonction f différence de fonctions dérivables sur $]0\,;\,1]$ est dérivable sur cet intervalle et $f'(x) = \dfrac{1}{20}\left(1 + \dfrac{4}{x^5}\right)$.
   Sur $]0\,;\,1]$ les deux termes de cette somme sont supérieurs à zéro, donc la dérivée est strictement positive : la fonction f est donc strictement croissante de moins l'infini (car $\displaystyle\lim_{x\to 0} -\dfrac{1}{x^4} = -\infty$) à $f(1) = \dfrac{1}{20}(1-1) = 0$.
   La fonction f étant continue il existe donc un réel unique α de $]0\,;\,1]$ tel que $f(\alpha) = -5$.
   On a $f(0,3) = \dfrac{1}{20}\left(0,3 - \dfrac{1}{0,3^4}\right) \approx -6,2$
   et $f(0,4) = \dfrac{1}{20}\left(0,4 - \dfrac{1}{0,4^4}\right) \approx -1,9$,
   donc $0,3 < \alpha < 0,4$.
   $f(0,32) \approx -4,75$ et $f(0,31) \approx -5,4$, donc
   $$0,31 < \alpha < 0,32.$$

2. **a.** u est dérivable sur $]0\,;\,1]$ comme inverse de la fonction v définie sur $]0\,;\,1]$ par $v(x) = 2x^2$.

On a $u'(x) = -\dfrac{v'}{v^2} = -\dfrac{4x}{4x^4} = -\dfrac{1}{x^3}$.

b. $V = \displaystyle\int_\alpha^1 \pi x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^1 \pi x^2 \times \dfrac{1}{20}\left(1+\dfrac{4}{x^5}\right)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^1 \dfrac{\pi}{20}\left(x^2+\dfrac{4}{x^3}\right)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{20}\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{4}{2x^2}\right)_\alpha^1 =$
$\dfrac{\pi}{20}\left(\dfrac{1^3}{3}-\dfrac{4}{2}\right)-\dfrac{\pi}{20}\left(\dfrac{\alpha^3}{3}-\dfrac{4}{\alpha}\right) = \dfrac{\pi}{20}\left(-\dfrac{5}{3}-\dfrac{\alpha^3}{3}+\dfrac{4}{2\alpha^2}\right) = \dfrac{\pi}{20}\left(-\dfrac{5}{3}-\dfrac{\alpha^3}{3}+\dfrac{2}{\alpha^2}\right)$.

Avec $\alpha \approx 0,31$ on obtient 3,006 et avec $\alpha \approx 0,32$ on obtient 2,804.

Donc $2,804 < V < 3,006$.

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère la suite (I_n) définie par $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$ et pour tout entier naturel n non nul

$$I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$.

Sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ est la dérivée de la fonction $x \longmapsto -\ln(1-x)$, donc

$I_0 = [-\ln(1-x)]_0^{\frac{1}{2}} : -\ln\frac{1}{2} + \ln 1 = -(-\ln 2) + 0 = \ln 2$.

2. **a.** $I_0 - I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{x}{1-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{1-x}{1-x}\,\mathrm{d}x$ (par linéarité de l'intégrale), donc

$I_0 - I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 1\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}$.

b. $I_0 - I_1 = \dfrac{1}{2} \iff I_1 = I_0 - \dfrac{1}{2} = \ln 2 - \dfrac{1}{2}$.

3. **a.** Quel que soit le naturel n :

$I_n - I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x - I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{x^{n+1}}{1-x}\,\mathrm{d}x$ et par linéarité de l'intégrale :

$I_n - I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{x^n}{1-x}-\dfrac{x^{n+1}}{1-x}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{x^n - x^{n+1}}{1-x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} x^n\dfrac{1-x}{1-x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} x^n\mathrm{d}x \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_n^{n+1} =$
$\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$.

b.

$I \leftarrow \ln 2$
$k \leftarrow 0$
Tant que $k < n$ faire
$\quad k \leftarrow k+1$
$\quad I \leftarrow I - \dfrac{0,5^k}{k}$
Fin Tant que
Afficher I

4. Soit n un entier naturel non nul.

On admet que si x appartient à l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ alors $0 \leqslant \dfrac{x^n}{1-x} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

a. On sait que les intégrales de ces trois fonctions positives sont rangées dans le même ordre que ces fonctions, donc
$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{n-1}}\,\mathrm{d}x$ soit :
$0 \leqslant I_n \leqslant \left[\dfrac{x}{2^{n-1}}\right]_0^{\frac{1}{2}}$ et enfin $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

b. On sait que $0 < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, donc d'après le théorème des « gendarmes », $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

5. **a.** Démonstration par récurrence :

- *Initialisation* : $S_1 = \dfrac{1}{2} = I_0 - I_1$ (démontré à la question **2. a.** : la relation est vraie au rang $n = 1$.
- *Hérédité* Supposons que pour un naturel $n \geqslant 1$, on ait :

$S_n = I_0 - I_n$, alors $S_{n+1} = S_n + \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1} = I_0 - I_n + \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1} = I_0 - I_n + (I_n - I_{n+1})$ (résultat **3. a.**).
Donc :
$S_n = I_0 - I_n + I - n - I_{n+1} = I_0 - I_{n+1}$: l'égalité est vraie au rang $n+1$.
On a démontré que la relation est vraie au rang 1 et que si elle est vraie à un rang supérieur ou égal à 1, elle est vraie au rang suivant : d'après l'axiome de récurrence, pour $n \geqslant 1$, $S_n = I_0 - I_n$.

b. On a vu à la question **4. b.** que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = I_0 = \text{ö}ln2$.

Exercice 4 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi la spécialité

1. Les trois points E, B et D appartenant aux trois axes de coordonnées et n'étant pas confondues avec O, le plan (EBD) existe et a une équation de la forme :

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{EBD}) \iff ax + by + cz = d, \text{ avec } a, b, c \text{ et } d \text{ réels.}$$

Donc :
$\text{E}(0\,;\,0\,;\,6) \in (\text{EBD}) \iff 6c = d \iff c = \dfrac{d}{6}$;
$\text{B}(12\,;\,0\,;\,0) \in (\text{EBD}) \iff 12a = d \iff a = \dfrac{d}{12}$;
$\text{D}(0\,;\,18\,;\,0) \in (\text{EBD}) \iff 18b = d \iff b = \dfrac{d}{18}$.
Donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{EBD}) \iff \dfrac{d}{12}x + \dfrac{d}{18}y + \dfrac{d}{6}z = d \iff \dfrac{1}{12}x + \dfrac{1}{18}y + \dfrac{1}{6}z = 1 \iff \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3}y + z = 6 \iff 3x + 2y + 6z = 36$.

2. **a.** G a même abscisse que B, même ordonnée que D et même cote que E, donc G(18; 6; 12).
On a donc $\overrightarrow{\text{AG}}\begin{pmatrix}12\\18\\6\end{pmatrix}$.

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{AG}) \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{\text{A}M} = t\overrightarrow{\text{AG}}$ c'est-à-dire si, avec $\overrightarrow{\text{A}M}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12t\\ y &=& 18t\\ z &=& 6t\end{array}\right.$$

b. Le point K$(x\,;\,y\,;\,z)$ existe si ses coordonnées vérifient l'équation de la droite (AG) et l'équation du plan (EBD) soit si le système suivant a au moins une solution :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x &=& 12t\\ y &=& 18t\\ z &=& 6t\\ 3x+2y+6z &=& 36\end{array}\right. \Rightarrow \text{(en remplaçant dans la dernière équation)}$$

$3\times 12t+2\times 18t+6\times 6t=36 \iff 36t+36t+36t=36 \iff 108t=36 \iff 6\times 18t=6\times 6 \iff 18t=6 \iff t=\dfrac{1}{3}$.

En reportant on obtient $x=12\times\dfrac{1}{3}=4$, $y=18\times\dfrac{}{3}=6$, $z=6\times\dfrac{1}{3}=2$.

Donc K(4 ; 6 ; 2)

3. Un vecteur $\overrightarrow{n}$ normal au plan (EBD) a pour coordonnées $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$.

La droite (AG) est-elle orthogonale au plan (EBD) si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{\text{AG}}$ sont colinéaires ce qui est manifestement faux puisque $12=3\times 4$, $18=2\times 9$

4. a. E(0 ; 0 ; 6) et D(0 ; 18 ;0), donc M(0 ; 9 ; 3).

On a donc $\overrightarrow{\text{BK}}\begin{pmatrix}-8\\6\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{BM}}\begin{pmatrix}-12\\9\\3\end{pmatrix}$.

On a $\overrightarrow{\text{BM}}=1,5\overrightarrow{\text{BK}}$: les vecteurs sont colinéaires, donc les points B, K et M sont alignés.

b. On trace [AH] qui coupe [DE] en son milieu M car ADHE est un rectangle.

Le point K appartient à la droite (AG) et d'après la question précédente à la droite (BM) : il est à l'intersection de ces deux droites. (voir la figure à la fin)

5. a. Les deux plans (ADE) et P sont parallèles : ils sont coupés par un troisième plan (EBD) selon deux droites parallèles; le plan P coupe donc le plan (EBD) selon une parallèle à la droite (ED).

b. La parallèle à la droite (ED) passant par K est tracée en tireté (voir la figure à la fin).

Exercice 4 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la matrice $M=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$ et les suites d'entiers naturels (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0=1$, $v_0=0$, et pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}$.

Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

On a calculé les premiers termes de la suite (v_n) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
v_n	0	1	4	15	56	209	780	2 911	10 864	40 545	151 316	564 719	2 107 560

1. D'après le tableau il semble que les chiffres des unités de v_n soient de façon cyclique : 0, 1 4, 5, 6, 9.

2. **a.** On a $M^2 = \begin{pmatrix} 4+3 & 6+6 \\ 2+2 & 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, puis

$M^3 = M^2 \times M = \begin{pmatrix} 14+12 & 21+24 \\ 8+7 & 12+14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix}$.

L'égalité (admise) $\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ v_{n+3} \end{pmatrix} = M^3 \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ se traduit donc par

$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+3} & = & 26u_n + 45v_n \\ v_{n+3} & = & 15u_n + 26v_n \end{array}\right.$ quel que soit le naturel n.

b. Du dernier résultat précédent on déduit que $15u_n \equiv 0\,[5]$ et par conséquent que $v_{n+3} \equiv 26v_n\,[5]$ et enfin que $v_{n+3} \equiv v_n\,[5]$.

3. *Initialisation* : pour $q = 0$, on a $v_r \equiv v_r\,[5]$ = l'équivalence est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que pour $q \in \mathbb{N}$, on ait $v_{3q+r} \equiv v_r\,[5]$.

Alors $v_{3(q+1)+r} = v_{3q+3+r} = v_{3q+r+3} \equiv v_{3q+r}\,[5]$ d'après la question précédente.

On a donc $v_{3(q+1)+r} \equiv v_{3q+r}\,[5]$: l'équivalence est vraie au rang $q+1$.

L'équivalence est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang q quelconque elle est vraie au rang suivant : d'après le principe de récurrence on a donc pour tout naturel q : $v_{3q+r} \equiv v_r\,[5]$.

4. • avec $r = 0$, l'équivalence précédente donne $v_{3q} \equiv v_0\,[5]$, soit $v_{3q} \equiv 0\,[5]$;
   • avec $r = 1$, l'équivalence précédente donne $v_{3q+1} \equiv v_1\,[5]$, soit $v_{3q} \equiv 1\,[5]$;
   • avec $r = 2$, l'équivalence précédente donne $v_{3q+2} \equiv v_2\,[5]$, soit $v_{3q} \equiv 4\,[5]$.

5. On a donc montré que pour tout naturel n, u_n est congru à 0 ou 1 ou 4 modulo 5. On a donc $v_n = 5p+0$ ou $v_n = 5p+1$, ou $v_n = 5p+4$.

• si p est pair, $p = 2q$, alors :

$v_n = 10q+0$, ou $v_n = 10q+1$, ou $v_n = 10q+4$, ce qui signifie que v_n est congru à 0, 1 ou 4 modulo 5 ;

• si p est impair, $p = 2q+1$, alors :

$v_n = 10q+5$, ou $v_n = 10q+6$, ou $v_n = 10q+9$, ce qui signifie que v_n a pour chiffre des unités 5, 6 ou 9.

Finalement le chiffre des unités de v_n est 0, 1, 4, 5 ,6, 9.

L'ensemble des ces valeurs est donc $\{0\ ;\ 1\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\ ;\ 9\}$

Partie B

1. On sait que $1 < \sqrt{3} < 2$, donc $1 < \dfrac{p}{q} < 2 \iff q < p < 2q$.

2. Si $M^{-} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $M = M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2a+3c & = & 1 \\ 2b+3d & = & 0 \\ 2a+2c & = & 0 \\ 2b+2d & = & 1 \end{array}\right..$$

On obtient de la première et de la troisième équation par différence $c = 1$, puis $a = -1$ et de même $d = 2$ et $b = -3$.

Donc $M = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. **a.** $\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ entraîne $p' = 2p - 3q$ et $q' = -p + 2q$.

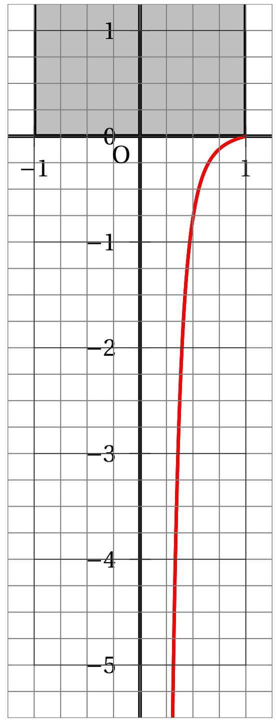
b. Puisque p et q sont des entiers naturels non nuls les relations de la question précédente montrent que p' et q' sont des entiers. relatifs.

c. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $p' = \alpha q'$.
$p' = \alpha q' \iff 2p - 3q = \alpha(-p + 2q) \iff (2+\alpha)p = (3+2\alpha)q$.
Mais $\dfrac{p}{q} = \sqrt{3} \iff p = q\sqrt{3}$, donc
$(2+\alpha)q\sqrt{3} = (3+2\alpha)q \iff \sqrt{3}(2+\alpha) = 3+2\alpha \iff \alpha(2-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 3 \iff$
$\alpha(2-\sqrt{3}) = \sqrt{3}(2-\sqrt{3}) \iff \alpha = \sqrt{3}$.
On a donc $p' = q'\sqrt{3}$.

d. On a vu à la question **1.** que $q < p < 2q \iff 2q < 2p < 4q \iff -q < 2p - 3q < q \iff -q < p' < q$.
De plus $q' = -p + 2q = -\sqrt{3}q + 2q = \left(2 - \sqrt{3}\right)q$: q' est le produit de deux facteurs supérieurs à zéro : donc $q' > 0$.
Finalement : $0 < q' < q$.

e. On a supposé que $\dfrac{p}{q} = \sqrt{3}$, la fraction étant irréductible et q le plus petit possible et on trouvé que dans ce cas $\sqrt{3} = \frac{p'}{q'}$ donc un autre quotient avec $q' < q$: ceci est contradictoire : l'hypothèse initiale est fausse.
Conclusion $\sqrt{3}$ n'est pas un rationnel.

Annexe 1 (exercice 2) :



Annexe 2 (exercice 4 pour les candidats n'ayant pas suivi la spécialité) : à rendre avec la copie