QUELQUES EXEMPLES DE RAISONNEMENTS MATHÉMATIQUES

I) Vérification directe par le calcul

E1 : Montrer que la multiplication est commutative dans l'ensemble {0 ; 1}

II) Démonstrations « de détachement »

a) **P1 : Règle de base**
$(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$ est une tautologie

On part d'une hypothèse vraie (P), on suit des règles logiques $(P \Rightarrow Q)$, et on arrive à une conclusion vraie (Q) : c'est la méthode la plus classique.

b) Quelques méthodes de déduction :

- **P2** : $(P \Rightarrow (Q \wedge R)) \ \equiv \ ((P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R))$
- **P3** : $(P \Rightarrow (Q \vee R)) \ \equiv \ ((P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow R))$
- **P4** : $((P \wedge Q) \Rightarrow R) \ \equiv \ ((P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R))$
- **P5** : $((P \vee Q) \Rightarrow R) \ \equiv \ ((P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R))$
- **P6** : $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \ \equiv \ ((P \wedge Q) \Rightarrow R)$

E2 : *Application de P6* : Montrer que : soit A et B deux ensembles, si $A \cap B = B$, alors $B \subset A$.

E3 : Soit E un ensemble quelconque et A et B deux sous-ensembles de E. Montrer l'implication suivante :

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \subset C_E B$$

III) Démonstration « de disjonction des cas »

P7 : Règle
$((P \Rightarrow Q) \wedge (\overline{P} \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$ est une tautologie.

E4 : Montrer que, pour tout réel x, $x^2 \geq 0$.

E5 : Montrer que : pour tout couple (a, b) de réels,

si $ab = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.

IV) Démonstration « par contraposée »

P8 : Règle : $(P \Rightarrow Q) \equiv ((\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P))$

E6 : Montrer que, pour tout entier n,

si n^2 est pair, alors n est pair.

E7 : f est une fonction <u>*injective*</u> si et seulement si :

Pour tous $(x ; y)$, éléments de $I \times I$, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

a) Montrer que la fonction telle que $f(x) = 3x - 2$ est injective sur **R**.

b) D'autre part, si A est un sous-ensemble de I, on note $f\langle A \rangle$ l'ensemble des images par f des éléments de A.

Montrer que si f est injective, alors :
Pour toute paire $(A ; B)$ de sous-ensembles de $I \times I$,
$f\langle A \rangle \cap f\langle B \rangle \subset f\langle A \cap B \rangle$.

E8 : Déterminer un réel α tel que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ |x-1| \leq \alpha \Rightarrow |x^2 - 1| \leq 1$$

E9 : Montrer que : $(\forall \varepsilon > 0,\ |a| \leq \varepsilon) \Rightarrow (a = 0)$.

E10 : Soit a et b deux réels.
Montrer que si $a \neq -1$ et $b \neq -1$, alors $a + b + ab \neq -1$.

V) Démonstration « par l'absurde »

a) **P9 : Règle** : Pour montrer une proposition, on montre que sa négation aboutit à une contradiction.

b) **Principes :**

- Pour montrer que Q est vraie, on suppose que *non Q* est vraie.
- On démontre ensuite que ((*non Q*) $\Rightarrow R$) est vraie ; on a ainsi démontré que R est vraie [*voir II)*].
- Or on sait par ailleurs que R est fausse d'où contradiction. Comme ((non Q) $\Rightarrow R$) est vraie alors non Q est fausse donc Q est vraie.

E11 : Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

E12 : Soit a, b et c trois réels strictement positifs tels que : $abc > 1$ et $a + b + c < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.

a) Montrer qu'aucun des réels a, b et c n'est égal à 1.

b) Montrer que l'un au moins des trois réels est inférieur ou égal à 1.

VI) Démonstration « par contre-exemple »

a) **P10 : Règle** : $(non(\forall x,\ P_x)) \ \equiv \ (\exists x,\ non(P_x))$

Pour montrer qu'une forme propositionnelle n'est pas toujours vraie, il suffit de trouver au moins une valeur pour laquelle elle est fausse.

E13 : $u_n = n^2 - n + 41$ est-il un nombre premier pour tout entier n ?

E14 : Soit f et g deux fonctions dérivables sur [0 ; 1].
A-t-on : Si $f \leq g$ sur [0 ; 1], alors $f' \leq g'$?

b) **Remarque** : On a : $(P \Rightarrow Q) \ \equiv \ (\overline{P} \vee Q)$. Donc, grâce à une des deux Lois de Morgan, on a :
$(non(P \Rightarrow Q)) \ \equiv \ (P \wedge \overline{Q})$

VII) Démonstration « par récurrence »

a) **P11 : Règle** : Pour démontrer une f.p. sur des entiers $(\forall n \in A,\ P_n)$, où A est un sous-ensemble de **N**, on peut utiliser l'<u>*axiome d'induction*</u>, qui est l'un des axiomes de définition de **N** (<u>*axiomes de Peano*</u>).

$$\left.\begin{array}{r} P_{n_0} \\ \forall k \in A,\ (P_k \Rightarrow P_{k+1}) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in A,\ P_n$$

b) **Remarque** : Ne pas confondre le fait de montrer que P_n est vraie avec le fait de montrer que l'implication $(P_k \Rightarrow P_{k+1})$ est vraie. En pratique, après avoir montré que P_{n_0} est vraie (« l'<u>*amorce*</u> »), on prend comme hypothèse que pour un k quelconque fixé ($k \geq n_0$), la proposition P_k est vraie (P_k s'appelle « l'<u>*hypothèse de récurrence*</u> »), puis, grâce à cette hypothèse et aux propriétés de P_k, on montre P_{k+1}.

E15 : Montrer que les formules suivantes sont fausses, bien que la « relation de récurrence » est vérifiée.

a) Pour tout entier n strictement positif,

$$u_n = 1 + 2 + ... + n = \frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2.$$

b) Pour tout entier n, $10^n + (-1)^n$ est multiple de 11.

E16 : Montrer par récurrence sur $n \geq 1$, que :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{n(n+1)}{4(n+2)(n+3)}.$$

c) P12 : Remarque : Cette méthode de démonstration est parfois appelée « <u>*récurrence de premier ordre*</u> » car on définit une « <u>*récurrence de second ordre*</u> » de la façon suivante :

$$\left.\begin{array}{c} P_{n_0} \\ \forall k \in A, \left(\forall i \in [n_0\,;k], P_i\right) \Rightarrow P_{i+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in A,\ P_n$$

C'est-à-dire qu'ici, on suppose la proposition vraie de n_0 <u>jusqu'au rang k</u> pour démontrer P_{k+1}.

E17 : Soit u la suite définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = c > 0$ et, pour tout entier positif n, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 2$.

a) Calculer les premiers termes jusqu'à l'indice 4.
b) Conjecturer une formule générale.
c) Démontrer cette formule par récurrence.

E18 : Montrer l'inégalité de Bernoulli :

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2,
pour tout réel a strictement positif, $(1+a)^n > 1+na$

E19 : Quelqu'un raconte ses vacances :

« *Il y a eu 7 demi-journées de pluie.*
Quand il pleuvait le matin, il faisait beau l'après-midi.
Il y a eu 5 matinées et 6 après-midi sans pluie. »

Déterminer le nombre de journées complètes sans pluie.

E20 : *« Si $x^2 + x + 1 = 0$, alors $x + 1 = -x^2$*
mais aussi $x(x + 1) + 1 = 0$.
En remplaçant $x + 1$ par $-x^2$ dans cette dernière équation, on a $-x^3 + 1 = 0$, c'est-à-dire $x^3 = 1$, donc $x = 1$. En revenant à la première équation, on obtient : $3 = 0$. »

Trouver l'erreur...

E21 : Voici quatre affirmations ; sont-elles compatibles ?

a) Certains mathématiciens sont des philosophes.
b) Les immortels ignorent la philosophie.
c) Aucun poète ne pratique les mathématiques.
d) Tous les mortels sont des poètes.

E22 : Compléter le cadre ci-dessous de telle sorte que chaque affirmation soit vraie.

Dans ce cadre, il y a ...... fois le chiffre 1
Dans ce cadre, il y a 1 fois le chiffre 2
Dans ce cadre, il y a ...... fois le chiffre 3
Dans ce cadre, il y a ...... fois le chiffre 4
Et pas d'autres chiffres.

E23 : André visite une ville et Bernard une autre. André ira à Londres ou à Paris. Si André va à Paris, Bernard ira à Madrid. Finalement, aucun des deux n'ira à Madrid.

Alors nécessairement :

- Bernard ira à Paris
- Bernard ira à Madrid
- Bernard ira à Londres
- André ira à Londres
- André n'ira pas à Londres

(une seule réponse correcte)

E24 : Les Vérix ne disent que des phrases vraies, les Mentix que des phrases fausses. On cherche l'argent qui est soit dans la boite de conserve, soit dans le coffre. En présence d'un Vérix et de deux Mentix, on a les réponses suivantes :

A : « *l'argent est dans le coffre* »
B : « *l'argent n'est pas dans la boite de conserve* »
C : « *l'argent n'est pas dans le coffre* »
Qui est quoi et où est l'argent ?

E25 : En présence de deux personnes dont on ne sait s'ils sont Vérix ou Mentix, on demande à l'une d'elles : « *L'un de vous deux est-il un Vérix ?* ». Elle répond et alors on sait immédiatement qui est quoi.
Qu'a-t-elle répondu et qui est quoi ?

E26 : Une personne, Vérix ou Mentix, déclare : « *Je suis un Mentix pauvre* ». Que peut-on en déduire ?

E27 : Un voyageur rencontre quatre personnes et demande à chacune :

« *Êtes-vous Vérix ou Mentix ?* ».

A répond : « *Nous sommes tous des Mentix* »
B répond : « *Un seul de nous est un Mentix* »
C répond : « *Il y a exactement deux Mentix parmi nous* »
D répond : « *Je suis un Vérix* »
D est-il effectivement un Vérix ?

E28 : Les Vérix et les Mentix parlent la même langue, mais différente de la nôtre. À la place des mots « *oui* » et « *non* », ils disent « *spatule* » et « *chaussette* », mais on ne sait pas lequel veut dire « *oui* » et lequel veut dire « *non* ». On demande à une personne, Vérix ou Mentix : « *Spatule veut-il dire oui ?* ».
Elle répond : « *Spatule* ».

a) Est-elle un Vérix ?
b) Que veut dire « *spatule* » ?

E29 : Les Drôlix mentent ou disent la vérité selon leur humeur. Voici deux Drôlix curieux :
A ment les lundi, mardi et mercredi, *B* ment les jeudi, vendredi et samedi.
Le reste du temps, ils disent la vérité.
On leur demande : « *Que faisiez-vous hier ?* ».
Tous les deux répondent : « *Hier, je mentais* ».
Quel jour sommes-nous ?