Prépa à la prépa - juin 2020 - Correction

1 Séance n° 1

1.1 Exercice n° 1

Montrer que $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Rappel : Dans $\mathbb{N}$, si $n=d^2$, alors $\sqrt{n}=d$, et si n n'est pas un carré, $\sqrt{n}\notin\mathbb{Q}$.

- Commençons par montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.
  Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$, c'est-à-dire que
  $$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$$
  avec p et q premiers entre eux.

  Alors $2=\frac{p^2}{q^2}$, et donc $2q^2=p^2$. Ainsi p^2 est pair, et donc p est pair. Il vient
  $$\exists k\in\mathbb{N}, p=2k$$
  Ainsi
  $$2q^2=(2k)^2=4k^2$$
  Donc $q^2=2k^2$, et donc q^2 est pair, et ainsi q est pair. D'où contradiction. Ainsi $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

- Montrons par l'absurde que $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.
  Supposons donc que $\sqrt{3}+\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$, c'est-à-dire que
  $$\sqrt{3}+\sqrt{2}=r$$
  avec $r\in\mathbb{Q}$ Ainsi
  $$\sqrt{3}=r-\sqrt{2}$$
  i.e.
  $$3=r^2+2-2r\sqrt{2}$$
  i.e. $\sqrt{2}=\frac{r^2-1}{2r}$, qui est donc un rationnel. D'où contradiction.

  Ainsi $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

1.2 Exercice n° 2

- Montrer qu'une fonction f (définie sur $\mathbb{R}$) dérivable et paire si et seulement si f' est impaire.

  Rappel :

  - Soit f une fonction définie sur I, un ensemble centré en 0 (i.e. $\forall x \in I, -x \in I$), alors : f paire $\iff \forall x \in I, f(-x) = f(x)$
  - Soit g une fonction définie sur I, un ensemble centré en 0 (i.e. $\forall x \in I, -x \in I$), alors : f impaire $\iff \forall x \in I, g(-x) = -g(x)$

($\Longrightarrow$) Montrons que si f dérivable et paire, alors f' est impaire.
On a $\forall x \in I, f(-x) = f(x)$. Notons que $x \longmapsto f(-x)$ est la composée de la fonction f et de la fonction $x \longmapsto -x$. Ainsi, on peut dériver la fonction (composée) qui se trouve dans le membre de gauche et celle qui se trouve dans le membre de droite. Donc, en « dérivant l'égalité »,

$$\forall x \in I, -f'(-x) = f'(x)$$

Il vient que $f'(-x) = -f'(x)$ pour tout $x \in I$, ainsi f' est bien impaire.

($\Longleftarrow$) Supposons f' impaire. Alors $\forall x \in I, f'(-x) = -f'(x)$.

Remarque : Une fonction impaire définie en 0 vérifie $f(0) = 0$.

On a alors $\forall x \in I, -f'(-x) = f'(x)$. Donc, on intègre les deux membres, et on obtient

$$\exists c \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x) + c$$

Or, f est définie sur $\mathbb{R}$, donc cette égalité est vraie en particulier en 0. c'est-à-dire $f(-0) = f(0) + c$, et donc, par la remarque précédente, $c = 0$. On en conclut que $f(-x) = f(x)$, et donc f est paire, ce que l'on voulait démontrer.

- A-t-on aussi : une fonction f est dérivable et impaire si et seulement si f' est paire ?

($\Longrightarrow$) On a $\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$. On dérive membre à membre, et on obtient

$$-f(-x) = -f'(x)$$

c'est-à-dire $f'(-x) = f'(x)$, donc f est paire, ce que l'on voulait montrer.

($\Longleftarrow$) On a $\forall x \in I, f'(-x) = f'(x)$.

On intègre membre à membre : $-f(-x) = f(x) + c$

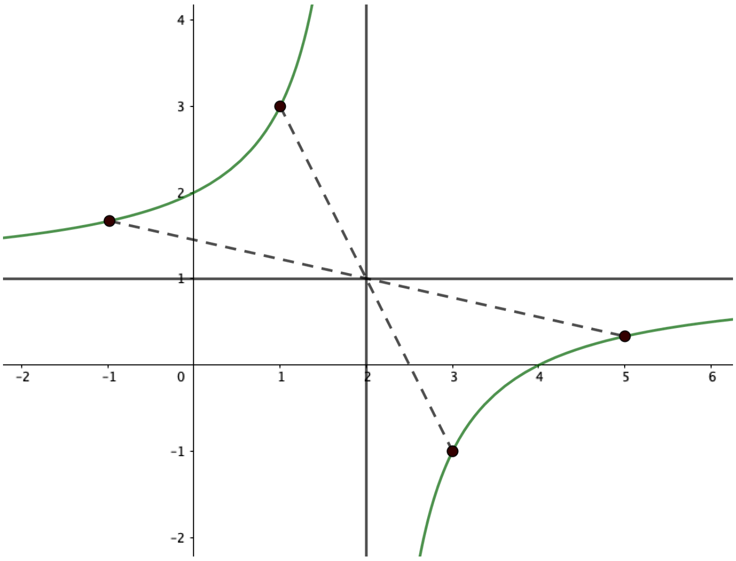
On veut $-f(-x) = f(x)$, donc on veut montrer que $c = 0$, mais l'on n'a pas assez d'information. L'équivalence serait vraie si on avait

$$f \text{ dérivable et impaire} \iff f' \text{ paire et } f(0) = 0$$

1.3 Exercice n° 3

Montrer que la courbe d'équation $y = \dfrac{e^x}{e^x+1}$ admet un centre de symétrie, à déterminer.

On utilise la propriété (que l'on comprend par un dessin) : Soit f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique. Si $\dfrac{f(a-x)+f(a+x)}{2} = b$, alors le point de coordonnées (a,b) est le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.



Dans le cadre de l'exercice, on considère $f : x \longmapsto \dfrac{e^x}{e^x+1}$. On conjecture graphiquement que $I\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ est le centre de symétrie de la courbe. Montrons-le grâce à la propriété précédente, en calculant $f(0-x)+f(0+x)$

$$\begin{aligned}
f(-x)+f(x) &= \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} + \frac{e^x}{e^x+1} \\
&= \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}+1} + \frac{e^x}{e^x+1} \\
&= \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}} + \frac{e^x}{e^x+1} \\
&= \frac{1}{1+e^x} + \frac{e^x}{e^x+1} \\
&= 1 \\
&= 2 \times \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{f(-x)+f(x)}{2} = \dfrac{1}{2}$. D'où $I\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ est bien le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

1.4 Exercice nº 4

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right)$.

En introduction, cherchons la limite de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$.

Notons

$$f(x)=\sqrt{x^2+x}-x=\frac{(x^2+x)-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

Pour $x>0$ (car on cherche la limite en $+\infty$),

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}=\frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}=\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\dfrac{1}{2}$.

Intéressons-nous maintenant à $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right)$, et appliquons la même méthode : Notons $a=\sqrt[3]{x^3+x^2}$ et $b=x$. Alors $a^3=x^3+x^2$ et $b^3=x^3$.

On a défini la *quantité conjuguée* en utilisant l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, c'est-à-dire $a-b=\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$.

Ici, on utilise l'identité remarquable : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Donc $a-b=\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$.

En appliquant la remarque, on a

$$\sqrt[3]{x^3+x^2}-x=\frac{x^3+x^2-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2+x^3\sqrt[3]{x^3+x^2}+x^2}=\frac{x^2}{(x^3+x^2)^{\frac{2}{3}}+x(x^3+x^2)^{\frac{1}{3}}+x^2}$$

Au dénominateur, on a donc

- $(x^3+x^2)^{\frac{2}{3}}=\left(x^3\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)^{\frac{2}{3}}=(x^3)^{\frac{2}{3}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}=x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$.
- $(x^3+x^2)^{\frac{1}{3}}=\left(x^3\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{3}}=(x^3)^{\frac{1}{3}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}=x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Ainsi

$$\sqrt[3]{x^3+x^2-x}=\frac{x^2}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}+x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}+x^2}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}+1}$$

Il vient que la limite cherchée est $\dfrac{1}{3}$.

1.5 Exercice n° 5

Pour tout entier $p > 1$, on définit l'entier $4\dots48\dots89$, composé de p chiffres 4, $p-1$ chiffres 8 et d'un chiffre 9. Montrer que ce nombre est toujours un carré parfait.

On traduit l'énoncé par :

$$\begin{aligned} n &= 9 + 9\left(10 + 10^2 + \dots + 10^{p-1}\right) + 4\left(10^p + \dots + 10^{2p-1}\right) \\ &= 9 + 80 \times \frac{10^{p-1}-1}{10-1} + 4 \times 10^p \times \left(1 + \dots + 10^{p-1}\right) \\ &= 9 + 80 \times \frac{10^{p-1}-1}{10-1} + 4 \times 10^p \times \frac{10^p - 1}{10-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{9}\left(81 + 80\left(10^{p-1} - 1\right) + 4 \times 10^p\left(10^p - 1\right)\right) \\ &= \frac{1}{9}\left(81 - 80 \times 10^{p-1} - 80 + 4 \times 10^{2p} - 4 \times 10^p\right) \\ &= \frac{1}{9}\left(1 - 8 \times 10^p + 4 \times 10^{2p} - 4 \times 10^p\right) \\ &= \frac{1}{9}\left(4 \times 10^{2p} + 4 \times 10^p + 1\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}\left(2 \times 10^p + 1\right)\right)^2 \end{aligned}$$

Ainsi n est le carré d'un nombre $p = \frac{1}{3}\left(2 \times 10^p + 1\right) \in \mathbb{Q}$. Montrons qu'en fait $p \in \mathbb{N}$, en montrant que $2 \times 10^p + 1$ est divisible par 3.

$$\begin{aligned} \text{On a } 2 \times 10^p + 1 &\equiv 2 \times 1^p + 1\,[3] \\ &\equiv 2 + 1\,[3] \\ &\equiv 0\,[3] \end{aligned}$$

D'où $2 \times 10^p + 1$ est divisible par 3, et donc $\frac{1}{3}\left(2 \times 10^p + 1\right) \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $p \in \mathbb{N}$, et donc n est bien le carré d'un entier.

1.6 Exercice n° 6

Pour tout réel $a \in]0, \pi[$, déterminer la forme algébrique de $\dfrac{1+e^{ia}}{1-e^{ia}}$.

Transformation de $e^{i\alpha} + e^{i\beta}$:

On a

$$z = e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\alpha - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)} + e^{i\left(\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\right) = e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\right)$$

D'après la formule d'Euler, on obtient $z = e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} 2\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

Ainsi $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$.

Pour $\beta = 0$, on obtient $e^{i\alpha} + 1 = 2\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$.

On en conclut que $e^{i\alpha} - 1 = e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)$. Or, par la formule d'Euler, on a

$$e^{i\alpha} - 1 = 2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Donc $e^{i\alpha} - 1 = 2i\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$.

D'où $z = \dfrac{e^{i\alpha}+1}{-e^{i\alpha}+1} = \dfrac{\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{-i\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)} = i\cot\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$, où $\cot(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

1.7 Exercice n° 7

La fonction tangente, définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, est bijective, et sa fonction réciproque est notée « arctan ».

a) Que vaut $\cos(\arctan(x))$ pour tout réel x ?

   On s'intéresse à $y = \cos(\arctan x)$, et on note $a = \arctan x$.

   a est donc le nombre réel tel que $x = \tan a$.

   Ainsi $x = \tan a$ et $y = \cos a$. Or, $1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$. Donc $1 + x^2 = \dfrac{1}{y^2}$.
   Donc $y^2 = \dfrac{1}{1+x^2}$, c'est-à-dire $\cos^2(\arctan(x)) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
   Or, $\arctan(x) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\cos(x) \geqslant 0$ sur cet intervalle, d'où $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

b) Montrer que, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\int_0^{\tan x} \frac{1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t = x$$

Notons h la fonction définie par

$$h(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$$

Notons

$$f(x) = h(\tan(x)) = \int_0^{\tan x} \frac{1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$$

f est la composée de la fonction h et de la fonction tan, donc f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi, pour tout $x \in I$, on a

$$f'(x) = h'(\tan x) \times \tan'(x)$$

Or, $h'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, et donc

$$f'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)} \times \left(1+\tan^2(x)\right) = 1$$

Donc $f(x) = x + c$, avec c une constante réelle. Or, $0 + c = f(0) = h(\tan 0) = 0$. Donc $c = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$h(\tan x) = x$$

ce que l'on voulait démontrer.

c) Par ailleurs, on montre que arctan est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Déterminer, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Posons $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. On dérive f sur chaque intervalle $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Ainsi f est constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Pour $x = 1$, on a $\tan(1) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$. Donc $f(x) = \frac{\pi}{2}$ sur $]0, +\infty[$.

Pour $x = -1$, on a $\tan(-1) = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = -\frac{\pi}{4}$. Donc $f(x) = -\frac{\pi}{2}$ sur $]-\infty, 0[$.

d) Déterminer une primitive de la fonction arctan.

Remarque de notation : Pour indiquer une primitive d'une fonction f, il est courant de noter $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$. On appelle cela une « intégrale indéfinie ». Nous utiliserons cette notation dans la correction de cet exercice.

Rappel : intégration par parties Soient u et v deux fonctions dérivables sur I. Alors

$$\int u'v = [uv] - \int uv'$$

Pour déterminer une primitive de arctan, on note arctan $= 1 \times$ arctan, et on intègre par parties, en posant $u'(x) = 1$ et $v(x) = \arctan(x)$. Alors $u(x) = x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x^2}$. D'après la formule précédente

$$\begin{aligned}
\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x &= \int 1 \times \arctan(x)\,\mathrm{d}x \\
&= [x\arctan(x)] - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= [x\arctan(x)] - \int \frac{1}{2} \times \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= [x\arctan(x)] - \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right] \text{ car } 1+x^2 > 0
\end{aligned}$$

Donc une primitive de la fonction arctan est la fonction

$$x \longmapsto x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$$

1.8 Exercice n° 8

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Calculer $\displaystyle\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x$.

Remarquons que la courbe d'équation $y = \sqrt{(x-a)(b-x)}$ peut se traduire par

$$y \geqslant 0 \text{ et } y^2 = -x^2 + (a+b)\,x - ab,$$

c'est-à-dire

$$y \geqslant 0 \text{ et } y^2 + x^2 - (a+b)\,x + ab = 0$$

c'est-à-dire

$$y \geqslant 0 \text{ et } y^2 + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{a^2+b^2+2ab}{4} + ab = 0,$$

c'est-à-dire

$$y \geqslant 0 \text{ et } y^2 + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2+2ab}{4} - \frac{4ab}{4},$$

c'est-à-dire

$$y \geqslant 0 \text{ et } y^2 + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2-2ab}{4},$$

c'est-à-dire

$$y \geqslant 0 \text{ et } y^2 + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

Donc la courbe est un demi-cercle de centre $\Omega\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$ et de rayon $R = \frac{a-b}{2}$.
Ainsi $\int_a^b (x-a)(b-x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire du demi-cercle précédent. Ainsi :
$\int_a^b (x-a)(b-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\pi R^2\right) = \frac{1}{2}\left(\pi\frac{(b-a)^2}{4}\right)$. Donc

$$\int_a^b (x-a)(b-x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi(b-a)^2}{8}$$

1.9 Exercice nº 9 : inégalités de Cauchy-Schwarz pour les sommes et inégalité de Minkowski

On considère les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} (a_k b_k)\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} (a_k)^2 \times \sum_{k=0}^{n} (b_k)^2$$

— Si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $b_k = 0$, alors l'inégalité est vraie.

— Supposons qu'il existe un entier $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $b_k \neq 0$. Notons, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k + x b_k)^2$$

On développe, et on obtient

$$f(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) x + \sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

Comme au moins l'un des b_k n'est pas nul, on a

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^2 > 0, \text{ et donc, en particulier } \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \neq 0.$$

Ainsi f est un trinôme du second degré, de signe constant (strictement positif). On en conclut que $\Delta \leqslant 0$, c'est-à-dire, en calculant Δ, que

$$4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \leqslant 0$$

c'est-à-dire, en divisant chaque membre de l'inégalité par 4,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \leqslant 0$$

d'où le résultat attendu.

- En déduire l'inégalité de Minkowski :

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=0}^{n} (b_k)^2}$$

On va utiliser l'égalité de Cauchy-Schwarz pour démontrer cette nouvelle inégalité. On reformule l'inégalité précédente en

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \text{ d'après l'inégalité précédente} \\
&\leqslant \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right)^2 \text{ d'après l'inégalité précédente}
\end{aligned}$$

On en conclut que $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$, ce que l'on voulait démontrer.

1.10 Exercice n° 10

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2,\ u_1 = 7 \text{ et, pour tout entier } n \text{ positif, } u_{n+2} = 7u_{n+1} - 12u_n.$$

Étudier les suites $v = (u_{n+1} - 3u_n)$ et $w = (u_{n+1} - 4u_n)$ pour déterminer u_n en fonction de n.

- On a, pour tout $n \geqslant 0$,
  $v_{n+1} = u_{n+2} - 3u_{n+1} = 7u_{n+1} - 12u_n - 3u_{n+1} = 4u_{n+1} - 12u_n = 4\left(u_{n+1} - 3u_n\right) = 4v_n$
  Donc v est la suite géométrique de raison 4, et de premier terme

  $$v_0 = u_1 - 3u_0 = 7 - 6 = 1$$

  Ainsi $v_n = 1 \times 4^n$, c'est-à-dire $v_n = 4^n$.

- On a, pour tout $n \geqslant 0$,

  $$w_{n+1} = u_{n+2} - 4u_{n+1} = 7u_{n+1} - 12u_n - 4u_{n+1} = 3u_{n+1} - 12u_n = 3\left(u_{n+1} - 4u_n\right) = 3w_n$$

  Donc w est la suite géométrique de raison 3, et de premier terme

  $$w_0 = u_1 - 4u_0 = 7 - 8 = -1$$

  Ainsi $w_n = -1 \times 3^n$, c'est-à-dire $w_n = -3^n$.

En remarquant que $u_n = u_{n+1} - 3u_n - u_{n+1} + 4u_n$, c'est-à-dire $u_n = v_n - w_n$, on en conclut que

$$u_n = 4^n + 3^n$$