Prépa à la prépa - juin 2020 - Correction

2 Séance n° 2

2.1 Exercice n° 1

On considère l'équation

$$(E) : x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$$

Déterminer une équation dont $y = x + \dfrac{1}{x}$ est solution et en déduire la résolution de (E).

Commençons par calculer y^2 en fonction de x : $y^2 = x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}$. Donc $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = y^2 - 2$.

On va alors diviser chaque membre de l'équation par x^2. Remarquons que $x = 0$ n'est pas solution de (E), donc on garde l'équivalence. Ainsi,

$$(E) \iff x^2 + 2x + 3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

c'est-à-dire

$$(E) \iff y^2 - 2 - 2y + 3 = 0$$

i.e.

$$(E) \iff y^2 + 2y + 1 = 0$$

i.e.

$$(E) \iff (y+1)^2 = 0$$

On obtient $y = -1$, qui est une racine double. Or, on sait que $y = x + \dfrac{1}{x}$.

On a donc $x + \dfrac{1}{x} = -1$, c'est-à-dire $x^2 + 1 = -x$, c'est-à-dire $x^2 + x + 1 = 0$.

On a $\Delta = 1 - 4 = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$.

On a donc deux solutions complexes non réelles conjuguées

$$x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Remarque 1 **:** Ces deux solutions sont des solutions doubles. En effet, l'équation peut s'écrire $\left(x^2 + x + 1\right)^2 = 0$.

Remarque 2 **:** x_1 est souvent noté $\jmath$, et on a $\jmath = e^{2i\frac{\pi}{3}}$. Alors $x_2 = \bar{\jmath} = \jmath^2$.

Remarque 3 **:** On peut remarquer que $(E) \iff (x - j)^2 \left(x - j^2\right)^2 = 0$.

2.2 Exercice n° 2

Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \frac{E(x)}{x}$, où $E(x)$ est la partie entière de x.

2.2.1 Première solution

$E(X)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Posons $x = E(x) + r(x)$, où $r(x) \in [0, 1[$.

Alors $\frac{E(x)}{x} = \frac{x + r(x)}{x} = 1 + \frac{r(x)}{x}$.

r est bornée et $x \longmapsto \frac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini. Donc $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{r}{x} = 0$.

Rappel : Le produit d'une fonction bornée par une fonction tendant vers 0 tend vers 0.

Il vient alors que $\lim_{x \longrightarrow +\infty} 1 + \frac{r(x)}{x} = 1$.

Donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{E(x)}{x} = 1$.

2.2.2 Seconde solution

On peut affirmer que $\forall x \in \mathbb{R}, E(x) \leqslant x < E(x) + 1$. Alors

$$x - 1 < E(x) \leqslant x$$

On peut alors dire que, comme x tend vers $+\infty$, on peut choisir $x > 0$, et donc

$$\frac{x-1}{x} < \frac{E(x)}{x} \leqslant 1$$

Alors, par le théorème d'encadrement, on a $\lim_{x \to +\infty} \frac{E(x)}{x} = 1$.

2.3 Exercice n° 3

Pour tout réel x, on pose

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

Déterminer son ensemble-image, montrer que f est bijective et expliciter sa fonction réciproque.

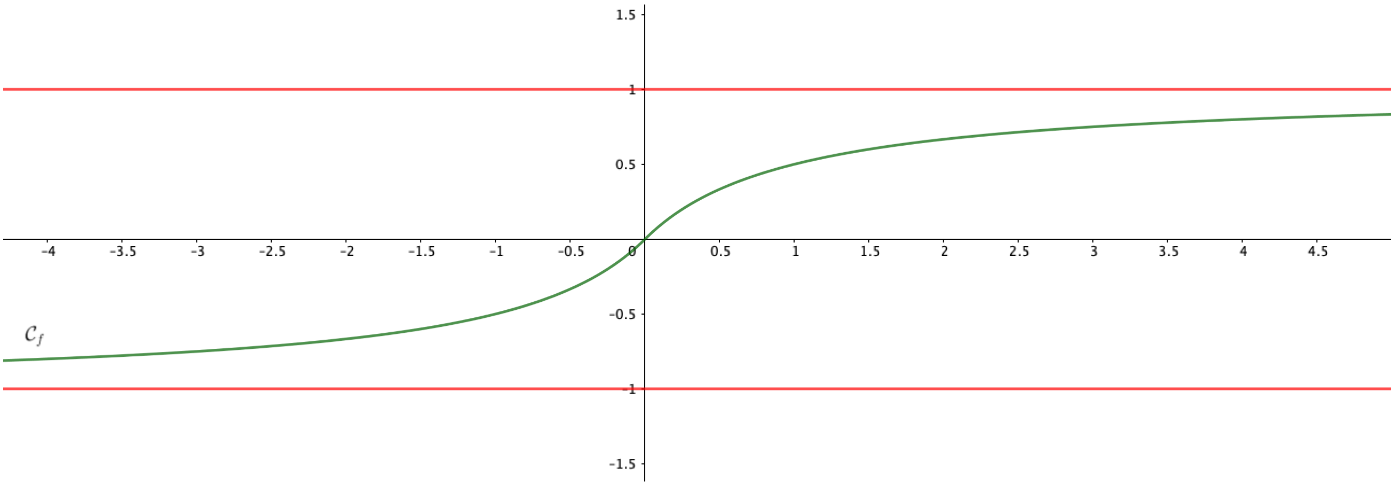
Soit f la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

Alors, si $x \geqslant 0$, $f(x) = \frac{x}{1+x} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$

Si $x < 0$, $f(x) = \frac{x}{1-x} = \frac{-x}{x-1} = \frac{-x+1-1}{x-1} = -1 - \frac{1}{x-1}$

La représentation graphique de la fonction est la suivante :



- Ensemble-image : On rappelle que $E = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)\}$.
  Ici, l'ensemble-image est $]-1, 1[$.

- Bijectivité : la fonction f est continue et strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$. Pour que la fonction soit bijective, il faut que « le raccordement en 0 » soit correct. On a

  — La restriction de f à $]-\infty, 0[$ atteint son maximum en 0, et donc $\lim\limits_{x \to 0^-} = 0$.

  — Le minimum de la restriction de f à $[0, +\infty[$ est en $f(0) = 0$.

  Donc le raccordement en 0 se fait sans ambiguïté, et f est bijective sur $\mathbb{R}$.

- Si $x \geqslant 0$, on a $y = 1 - \dfrac{1}{x+1}$.
  Alors $\dfrac{1}{x+1} = 1 - y$, i.e. $\dfrac{1}{1-y} = x + 1$, i.e. $x = \dfrac{1}{1-y} - 1 = \dfrac{y}{-y+1}$.
  Donc, pour $x \geqslant 0$, $x = \dfrac{y}{-y+1}$
  Si $x < 0$, on a $y = -1 - \dfrac{1}{x-1}$.
  Alors $\dfrac{1}{x-1} = -1 - y$, i.e. $\dfrac{1}{-1-y} = x - 1$, i.e. $x = 1 - \dfrac{1}{1+y} = \dfrac{y}{y+1}$.
  Donc, pour $x < 0$, $x = \dfrac{y}{y+1}$
  Donc, pour tout $y \in]-1, 1[$, $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{-|y| + 1} = \dfrac{y}{1 - |y|}$

2.4 Exercice n° 4 : inégalité des accroissements finis

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction dérivable sur $[a, b]$.
On suppose que f' est bornée entre m et M. Montrer qu'alors

$$m \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M$$

On suppose que

$$\forall x \in [a, b], m \leqslant f'(x) \leqslant M \tag{*}$$

On doit montrer que $m\,(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M\,(b - a)$.

Remplaçons b par x. On obtient $m\,(x - a) \leqslant f(x) - f(a) \leqslant M\,(x - a)$.

Il faut donc montrer que $\begin{cases} m\,(x - a) \leqslant f(x) - f(a) \\ f(x) - f(a) \leqslant M\,(x - a) \end{cases}$

On étudie séparément les deux inéquations :

Posons $g(x) = f(x) - f(a) - m\,(x - a)$.
Montrons que g est positive.

g est une fonction dérivable et
$\forall x \in [a, b], g'(x) = f'(x) - m$.

Par l'équation (*), on a $g'(x) > 0$.

Ainsi, la fonction g est croissante sur $[a, b]$.

Pour montrer que g est positive sur $[a, b]$, il suffit maintenant de monter que $g(a) \geqslant 0$.
Or, $g(a) = f(a) - f(a) - m\,(a - a) = 0$.

Donc g est croissante et $g(a) \geqslant 0$. Ainsi, pour tout $x \in [a, b]$, g est positive, et ainsi la première inégalité du système.

Posons, $h(x) = f(x) - f(a) - M\,(x - a)$.
Montrons que h est négative.

h est une fonction dérivable et
$\forall x \in [a, b], h'(x) = f'(x) - M$

Par l'équation (*), on a $h'(x) < 0$.

Ainsi, la fonction h est décroissante sur $[a, b]$.

Pour montrer que h est négative sur $[a, b]$, il suffit maintenant de monter que $h(a) \leqslant 0$.
Or, $h(a) = f(a) - f(a) - M\,(a - a) = 0$.

Donc h est croissante et $h(a) \leqslant 0$. Ainsi, pour tout $x \in [a, b]$, h est négative, et ainsi la seconde inégalité du système.

D'où le résultat attendu.

2.5 Exercice n° 5

Le *plus petit multiple commun* (positif) de deux entiers a et b, noté $PPCM\,(a,b)$ vérifie

$$PGCD\,(a,b) \times PPCM\,(a,b) = ab$$

Résoudre alors le système $\left\{ \begin{array}{rl} PGCD\,(a,b) = a - b & (1) \\ PPCM\,(a,b) = 72 & (2) \end{array} \right.$.

(Analyse) : Soit a et b deux entiers. Notons $d = PGCD(a,b)$. Alors $a = da'$ et $b = db'$ avec $PGCD(a',b') = 1$.

Alors, si on note $m = PPCM(a,b)$, on a donc, par définition, $md = ab$, donc $md = d^2a'b'$, et donc $m = da'b'$.

Avec ces notations, l'équation (1) devient $d = da' - db'$, i.e. $a' - b' = 1 \quad (*)$.

De même, l'équation (2) devient $da'b' = 72$.

Or, de la relation $(*)$, on a $a' = b' + 1$, donc l'équation (2) devient $db'\,(b'+1) = 72$.

On va chercher les valeurs de d et b'. Remarquons que $d > 1$, donc $b'\,(b'+1) \leqslant 72$. Or, $b^2\,(b'+1) > b'^2$. Donc $b'^2 \leqslant 72$, c'est-à-dire $b' \leqslant 72$, et donc $b' < \sqrt{72}$, i.e. $b' \leqslant 8$.

Donc $b' \leqslant 8$ et b' divise 72. Il vient les six cas suivants :

b'	1	2	3	4	6	8
$b'+1$	2	3	4	5	7	9
$b'\,(b'+1)$	2	6	12	20	42	72
$d = \dfrac{72}{b'\,(b'+1)}$	$\dfrac{72}{2} = 36$	$\dfrac{72}{6} = 12$	$\dfrac{72}{12} = 6$	$\dfrac{72}{20} \notin \mathbb{N}$	$\dfrac{72}{42} \notin \mathbb{N}$	$\dfrac{72}{72} = 1$

Les deux cas où $d \notin \mathbb{N}$ sont à exclure. On trouve donc quatre couples (b',d) : $(1,36)$, $(2,12)$, $(3,6)$ et $(8,1)$. On fait à nouveau un tableau pour trouver les valeurs de a et b :

b'	d	$a' = b'+1$	$a = da'$	$b = db'$
1	36	2	72	36
2	12	3	36	24
3	6	4	24	18
8	1	9	9	8

On vérifie nos résultats (Synthèse) :

— Pour le couple $(72, 36)$, on a $PGCD\,(72, 36) = 36 = 72-36$ et $PPCM\,(72, 36) = 72$.

— Pour le couple $(36, 24)$, on a $PGCD\,(36, 24) = 12 = 36-24$ et $PPCM\,(36, 24) = 72$.

— Pour le couple $(24, 18)$, on a $PGCD\,(24, 18) = 6 = 24-18$ et $PPCM\,(24, 18) = 72$.

— Pour le couple $(9, 8)$, on a $PGCD\,(9, 8) = 1 = 9 - 8$ et $PPCM\,(9, 8) = 72$.

Donc l'ensemble des solutions du système est

$$\mathcal{S} = \{(9, 8)\,, (24, 18)\,, (36, 24)\,, (72, 36)\}$$

2.6 Exercice n° 6

Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Résoudre l'équation

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} \tag{E}$$

Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Alors

$$\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = \frac{1+i\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{1-i\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}} = \frac{\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha}$$

Donc,

$$\begin{aligned}(\mathrm{E}) \quad &\iff \quad \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = e^{2i\alpha} \\ &\iff \quad \exists k \in \{-1, 0, 1\}\,, \frac{1+iz}{1-iz} = e^{i\left(\frac{2\alpha+2k\pi}{3}\right)}\end{aligned}$$

Notons $a_k = e^{i\left(\frac{2\alpha+2k\pi}{3}\right)}$. Ainsi l'équation devient $\frac{1+iz}{1-iz} = a_k$, i.e. $1 + iz = a_k - a_k iz$, i.e. $iz + a_k iz = a_k - 1$, i.e. $iz\,(1 + a_k) = a_k - 1$.

On veut diviser chaque membre de cette équation par $1 + a_k$, on cherche donc quand $1 + a_k = 0$, i.e.

$$
\begin{aligned}
a_k = -1, \quad \text{i.e.} \quad & e^{i\frac{2\alpha+2k\pi}{3}} = e^{i\pi+2k'\pi},\ k' \in \mathbb{Z} \\
\text{i.e.} \quad & \frac{2\alpha+2k\pi}{3} = \pi + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z} \\
\text{i.e.} \quad & \alpha = -k\pi + \frac{3\pi}{2} + 3k'\pi, k' \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

$\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc ce dernier cas n'a pas jamais lieu.

$$
\begin{aligned}
\text{Ainsi } (E) \quad & \Longleftrightarrow \quad \exists k \in \{-1, 0, 1\}, z = \frac{a_k - 1}{i\,(a_k + 1)} \\
& \Longleftrightarrow \quad z = \frac{e^{i\left(\frac{2\alpha+2k\pi}{3}\right)} - 1}{i\left(e^{i\left(\frac{2\alpha+2k\pi}{3}\right)} + 1\right)}
\end{aligned}
$$

Grâce à l'angle moitié, on obtient :

$$
z = \frac{e^{i\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{n}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{n}\right)} - e^{-i\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{n}\right)}\right)}{ie^{i\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{n}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{n}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{n}\right)}\right)}
$$

On fait apparaître les formules d'Euler au numérateur (en multipliant et divisant par $2i$) et au dénominateur (en multipliant et divisant par 2), pour obtenir :

$$
z = \frac{e^{i\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{n}\right)} \times 2i \times \left(\dfrac{e^{i\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{n}\right)} - e^{-i\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{n}\right)}}{2i}\right)}{ie^{i\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{n}\right)} \times 2 \times \left(\dfrac{e^{i\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{n}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{n}\right)}}{2}\right)}
$$

La quantité entre parenthèses au dénominateur vaut $\cos\left(\dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{k\pi}{n}\right)$.

La quantité entre parenthèses au numérateur vaut $\sin\left(\dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{k\pi}{n}\right)$. Ainsi

$$
z = \frac{2i\sin\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3}\right)}{i\left(2\cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3}\right)\right)}
$$

On simplifie par $2i$, et donc

$$
z = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3}\right)}
$$

c'est-à-dire que les $z = \tan\left(\dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{k\pi}{3}\right)$, pour $k \in \{-1, 0, 1\}$. Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est

$$
\mathcal{S} = \left\{\tan\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3}\right) \,\middle|\, k \in \{-1, 0, 1\}\right\} = \left\{\tan\left(\frac{\alpha - \pi}{3}\right), \tan\left(\frac{\alpha}{3}\right), \tan\left(\frac{\alpha + \pi}{3}\right)\right\}
$$

2.7 Exercice n° 7

Pour tout couple (a, b) de réels, on note $\max(a, b)$ le plus grand des deux nombres a et b.

Étudier la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \int_0^1 \max(x, t)\,\mathrm{d}t$$

On fait une disjonction de cas :

- Si $x < 0$, $\max(x, t) = t$, et donc

$$f(x) = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

- Si $x > 1$, $\max(x, t) = x$, donc

$$f(x) = \int_0^1 x\,\mathrm{d}t = [xt]_0^1 = x$$

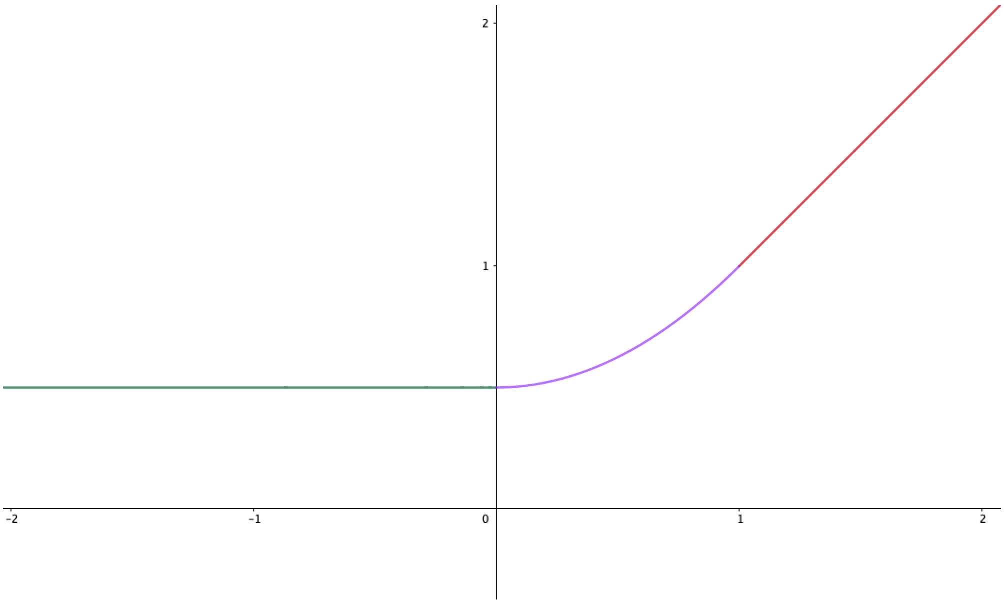
- Si $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$f(x) = \int_0^x \max(x, t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 \max(x, t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x x\,\mathrm{d}t + \int_x^1 t\,\mathrm{d}t = [xt]_0^x + \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1$$

Ainsi, pour $x \in [0, 1]$,

$$f(x) = x^2 - 0 + \frac{1}{2} - 0 = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2},$$

On peut tracer la représentation graphique de la fonction f :



Donc la fonction est continue. Est-elle dérivable ? On pourrait pour cela étudier le taux de variation en 0 et en 1... Ce prolongement de l'exercice est laissé au lecteur.

2.8 Exercice n° 8

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n + 6}{u_n + 2} \end{cases}$

Étudier la suite $v = \left(\dfrac{u_n - 2}{u_n + 3}\right)$ pour déterminer l'expression générale de u_n en fonction de n.

On calcule v_{n+1} pour montrer que la suite v est une suite géométrique :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} &= \frac{\dfrac{u_n+6}{u_n+2} - 2}{\dfrac{u_n+6}{u_n+2} + 3} \\
&= \frac{\dfrac{u_n + 6 - 2u_n - 4}{u_n+2}}{\dfrac{u_n + 6 + 3u_n + 6}{u_n+2}} \\
&= \frac{\dfrac{-u_n + 2}{u_n+2}}{\dfrac{4u_n + 12}{u_n+2}} \\
&= \frac{-u_n + 2}{4u_n + 12} \\
&= \frac{-(u_n - 2)}{4(u_n + 3)} \\
&= -\frac{1}{4} v_n
\end{aligned}$$

Ainsi v est la suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{4}$ et de premier terme

$$v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 3} = \frac{1-2}{1+3} = -\frac{1}{4}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = -\frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

$$
\begin{aligned}
\text{Ainsi } \left(-\frac{1}{4}\right)^n = \frac{u_n-2}{u_n+3} \quad &\text{i.e.} \quad (u_n+3)\left(-\frac{1}{4}\right)^n = u_n - 2 \\
&\text{i.e.} \quad u_n\left(-\frac{1}{4}\right)^n + 3\left(-\frac{1}{4}\right)^n = u_n - 2 \\
&\text{i.e.} \quad u_n\left(-\frac{1}{4}\right)^n - u_n = -3\left(-\frac{1}{4}\right)^n - 2 \\
&\text{i.e.} \quad u_n\left(\left(-\frac{1}{4}\right)^n - 1\right) = -3\left(-\frac{1}{4}\right)^n - 2 \\
&\text{i.e.} \quad u_n = \frac{-3\left(-\frac{1}{4}\right)^n - 2}{\left(-\frac{1}{4}\right)^n - 1} \\
&\text{i.e.} \quad \boxed{u_n = \frac{3\left(-\frac{1}{4}\right)^n + 2}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n}}
\end{aligned}
$$

2.9 Exercice n° 9

Soit un entier $n > 1$. Exprimer autrement $A_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ pour en déterminer la limite quand n tend vers l'infini.

On a les égalité suivantes :

$$
\begin{aligned}
A_n &= \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) \\
&= \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k+1}{k} \times \frac{k-1}{k}\right) \\
&= \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right) \times \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \ldots \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-1}{n}\right) \times \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \ldots \frac{n}{n-1} \times \frac{n+1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} \text{ par produits télescopiques (simplifications successives)} \\
&= \frac{n+1}{2n}
\end{aligned}
$$

Il vient que la limite de A_n quand n tend vers l'infini est $\frac{1}{2}$.

2.10 Exercice n° 10

a) Montrer que l'équation $3\sin x + 4\cos x = 2$ peut s'écrire sous la forme $a\sin(x+b) = c$.

Remarque introductive : Il est toujours possible d'écrire une expression de la forme $u\sin(x) + v\cos(x)$ sous la forme $R\sin(x+\phi)$.

En effet

$$\begin{aligned} R\sin(x+\phi) &= R(\sin(x)\cos(\phi) + \cos(x)\sin(\phi)) \\ &= R\cos(\phi)\sin(x) + R\sin(\phi)\cos(x) \end{aligned}$$

Par identification, on obtient $\begin{cases} u = R\cos(\phi) \\ v = R\sin(\phi) \end{cases}$

- En divisant membre à membre, on obtient l'égalité : $\tan(\phi) = \dfrac{v}{u}$, et donc $\phi = \arctan\left(\dfrac{v}{u}\right)$.

- En ajoutant même à membre les carrés, on obtient l'égalité

$$R^2\sin^2(\phi) + R^2\cos^2(\phi) = u^2 + v^2$$

i.e.

$$R^2\left(\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)\right) = u^2 + v^2$$

i.e.

$$R^2 = u^2 + v^2$$

i.e.

$$R = \sqrt{u^2+v^2} \quad \text{car } r \geqslant 0$$

Nous allons appliquer ce même type de raisonnement dans le cas où $u = 3$ et $v = 4$.

$$\begin{aligned} a\sin(x+b) = c &\iff a(\sin(x)\cos(b) + \cos(x)\sin(b)) = c \\ &\iff a\cos(b)\sin(x) + a\sin(b)\cos(x) = c \end{aligned}$$

Donc, par identification : $\begin{cases} a\cos(b) = 3 \\ a\sin(b) = 4 \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} \cos(b) = \dfrac{3}{a} & (1) \\ \sin(b) = \dfrac{4}{a} & (2) \end{cases}$

On est donc dans le cas d'un triangle rectangle dont les longueurs des côtés de l'angle droit sont 3 et 4, et la longueur de l'hypoténuse est a. D'après le théorème de Pythagore, on obtient $\boxed{a = 5}$.

En divisant l'équation (2) par l'équation (1), on obtient $\tan(b) = \frac{4}{3}$. On en déduit que $\boxed{b = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)}$.

Il vient alors que $\boxed{c = 2}$, et donc on obtient que

$$3\sin x + 4\cos x = 2 \Longleftrightarrow 5\left(\sin\left(x - \arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right)\right) = 2$$

b) Résoudre alors l'équation.

On cherche à résoudre $3\sin x + 4\cos x = 2$ en se servant de l'équivalence précédente. On va donc résoudre

$$5\left(\sin\left(x - \arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right)\right) = 2$$

En divisant l'égalité par 5, on obtient

$$\sin\left(x - \arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{2}{5}$$

On obtient alors

$$x - \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \equiv \frac{2}{5}\,[2\pi] \text{ ou } x - \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \equiv \pi - \frac{2}{5}\,[2\pi]$$

On en conclut que

$$\boxed{x \equiv \arctan\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{2}{5}\,[2\pi]} \text{ ou } \boxed{x \equiv \arctan\left(\frac{4}{3}\right) + \pi - \frac{2}{5}\,[2\pi]}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est donc

$$\mathcal{S} = \left\{\arctan\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{2}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\arctan\left(\frac{4}{3}\right) + \pi - \frac{2}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$