Prépa à la prépa - juin 2020 - Correction

3 Séance n° 3

3.1 Exercice n° 1

On note a, b et c les trois solutions de l'équation $x^3 + 2x - 1 = 0$. Calculer $a^3 + b^3 + c^3$.
On note a, b et c les racines de $x^3 + 2x - 1 = 0$. Alors cette équation est équivalente à

$$(x-a)(x-b)(x-c) = 0$$

et on peut identifier les coefficients.

On développe, et l'équation est alors équivalente à

$$\left(x^2 - (a+b)x + ab\right)(x-c) = 0,$$

c'est-à-dire

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc = 0$$

Par identification, $\begin{cases} a+b+c = 0 \\ ab+bc+ca = 2 \\ abc = 1 \end{cases}$. On notera $S = a+b+c$, $T = ab+bc+ca$ et $P = abc$.

On cherche $K = a^3 + b^3 + c^3$. Cherchons d'abord une façon d'exprimer $K_2 = a^2 + b^2 + c^2$, pour simplifier le problème et comprendre la méthode.

On a $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$. D'où $S^2 = K_2 + 2T$. Il vient que $K_2 = S^2 - 2T$.

Cherchons maintenant K. On développe $(a+b+c)^3$.

$$\begin{array}{rcl}
(a+b+c)^3 & = & (a+b)^3 3(a+b)^2 c + 3(a+b)c^2 + c^3 \\
& = & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac2 + 3bc^2 + c^3 \\
& = & a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + ab^2a^2c + b^2c + ac^2 + bc^2) + 6abc
\end{array}$$

Calculons $S \times T$:

$$\begin{array}{rcl}
S \times T & = & (a+b+c)(ab+bc+ca) \\
& = & a^2b + abc + ac^2 + ab^2 + b^2c + abc + abc + bc^2 + ac^2 \\
& = & (a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + bc^2 + ac^2) + 3abc
\end{array}$$

Ainsi $a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + bc^2 + ac^2 = S \times T - 3P$.

On en conclut que $S^3 = K + 3(S \times T - 3P) + 6P$.

Donc $K = S^3 - 3ST + 3P$ dans le cas général. Donc, avec les hypothèses du problème :

$$a^3 + b^3 + c^3 = 0 - 0 + 3 \times 1 = 3$$

3.2 Exercice n° 2

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f\left(f\left(x\right)\right) = \dfrac{x}{2} + 3$.

Exprimer $f\left(\dfrac{x}{2} + 3\right)$ en fonction de $f(x)$ et en déduire que f est une fonction affine.

On sait que $f\left(f\left(x\right)\right) = \dfrac{x}{2} + 3\ (*)$, que l'on peut aussi noter $f \circ f\left(x\right) = \dfrac{x}{2} + 3\ (**)$

Par associativité de la composition $f \circ (f \circ f) = (f \circ f) \circ f$. Ainsi, en composant par f à gauche dans $(*)$, on a

$$f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right) = f\left(\frac{x}{2} + 3\right)$$

Notons cela

$$f \circ f\left(f\left(x\right)\right) = f\left(\frac{x}{2} + 3\right)$$

En remplaçant $f(x)$ par x dans $(**)$, on obtient

$$f \circ f\left(f\left(x\right)\right) = \frac{f(x)}{2} + 3$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x}{2} + 3\right) = \frac{f(x)}{2} + 3$$

Or, on sait que f est dérivable, et $x \longmapsto \dfrac{x}{2} + 3$ aussi. On dérive membre à membre pour obtenir

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{2} f'\left(\frac{x}{2} + 3\right) = \frac{1}{2} f'(x)$$

Donc $f'\left(\dfrac{x}{2} + 3\right) = f'(x)$. Pour montrer que f' est constante, on s'intéresse à la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ premier terme $u_0 = x$ définie par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 3$$

Les premiers termes de cette suite sont $u_0 = x$, $u_1 = \dfrac{1}{2} u_0 + 3 = \dfrac{x}{2} + 3$, et donc la suite $\left(f'(u_n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

En étudiant la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, on montre qu'elle converge vers 6.
Par continuité de f sur $\mathbb{R}$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \lim_{n \to +\infty} f'\left(u_n\right) = f'\left(\lim_{n \to +\infty} u_n\right) = f'(6)$$

Ainsi$f'(x) = f'(6)$, donc f' est constante et donc f est affine.

3.3 Exercice n° 3

Montrer que toute fonction est la somme, d'une unique façon, d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Supposons le problème résolu, et notons respectivement p et i respectivement les deux fonctions paire et impaire. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = p(x) + i(x) \tag{1}$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = p(-x) + i(-x)$$

i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = p(x) - i(x) \tag{2}$$

On ajoute les équations 1 et 2 : $f(x) + f(-x) = 2p(x)$

On retranche les équations 1 et 2 : $f(x) - f(-x) = 2i(x)$
Donc $p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $i(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$, et on a donc montré l'existence et l'unicité de la décomposition demandée.

3.4 Exercice n° 4

Si a est un réel strictement positif et b un réel quelconque, on définit « a puissance b » par $a^b = e^{b \ln a}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(1,0001)^x}{x^{2020}}$.
On a les égalité suivantes, grâce à la notation introductive,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(1,0001)^x}{x^{2020}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x \ln(1,0001)}}{e^{2000 \ln x}} = \lim_{x \to +\infty} e^{x \ln(1,0001) - 2020 \ln x} = \lim_{x \to +\infty} e^{x\left(\ln(1,0001) - 2020 \frac{\ln x}{x}\right)}$$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\ln(1,0001) - 2020 \dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty$ et on conclut, par composition, que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(1,0001)^x}{x^{2020}} = +\infty$$

Remarque : Cela signifie que $1,0001^x$ dépasse x^{2020} à partir d'un certain rang, ce qui n'est pas intuitif ! Par des méthodes informatiques, on trouve que ce rang est environ 4×10^8, i.e. $1,001^x > x^{2020}$ à partir de x supérieur à 400 millions...

3.5 Exercice n° 5

Montrer que la somme de cinq carrés parfaits d'entiers consécutifs n'est jamais un carré parfait.
On considère 5 entiers consécutifs

$$a-2, a-1, a, a+1, a+2$$

$S=(a-2)^2+(a-1)^2+a^2+(a+1)^2+(a+2)=a^2-4a+4+a^2-2a+a^2+a^2+a^2+2a+1+a^2+4a+4$

On simplifie, et on obtient $S=5a^2+10=5\left(a^2+2\right)$.

Par l'absurde, suppose que $S=5\left(a^2+2\right)$ est un carré parfait, i.e. qu'il existe un entier b tel que $5\left(a^2+2\right)=b^2$.

On constate que b^2 est un multiple de 5, et donc b est un multiple de 5. Posons $b=5c$. Il vient

$$5\left(a^2+2\right)=(5c)^2=25c^2$$

D'où $a^2+2=5c^2$. Faisons maintenant un tableau de congruences de carrés modulo 5

a	0	1	2	3	4
a^2	0	1	4	4	1
a^2+2	2	3	1	1	3

D'où a^2+2 n'est jamais un un multiple de 5. D'où contradiction.
Ainsi l'équation $a^2+2=5c^2$ n'a pas de solutions, et donc la somme de cinq carrés parfaits d'entiers consécutifs n'est jamais un carré parfait.

3.6 Exercice n° 6

Soit un entier $n>0$.

a) Déterminer, dans $\mathbb{C}$, les racines n-ièmes de 1, i.e. les solutions de l'équation $z^n=1$.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On veut résoudre $z^n=1$.

Remarque : $z^n=1$, donc $|z^n|=|1|$, i.e. $|z|^n=1$. Or, $|z|$ est un réel positif. Donc $|z|=1$.

Posons $z=e^{i\alpha}$, avec $a\in\mathbb{R}$. L'équation $z^n=1$ peut donc s'écrire

$$\left(e^{i\alpha}\right)^n=1$$

i.e.

$$e^{in\alpha}=1$$

i.e.

$$e^{in\alpha}=e^{i0}$$

On a donc $n\alpha \equiv 0\,[2\pi]$.

Donc $\exists k \in \mathbb{Z}, n\alpha = 0 + 2k\pi$, et donc $\alpha = \dfrac{2k\pi}{n}$

On choisit n entiers consécutifs, par exemple de 0 à $n-1$, et on obtient $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

b) Calculer alors le produit de ces racines n-ièmes.

$P = \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{\frac{2i\pi}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} k} = e^{\frac{2i\pi}{n}\frac{(n-1)n}{2}} = e^{(n-1)i\pi}$

Si $n-1$ est pair (i.e. n impair), $P = 1$.

Si $n-1$ est impair (i.e. n pair), $P = -1$.

c) Résoudre l'équation $(z-i)^n = (z+i)^n$.

$-i$ n'est pas solution de cette équation, ainsi cette équation est équivalente à

$$\frac{(z-i)^n}{(z+i)^n} = 1$$

i.e.

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = 1$$

Notons $Z = \dfrac{z-i}{z+i}$. Les solutions de l'équation $Z^n = 1$ sont donc les nombres complexes z tels que Z est une racine n-ième de l'unité, i.e. tels que $Z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.

On cherche donc les z solutions de l'équation. De l'égalité $Z = \dfrac{z-i}{z+i}$, on a $Z(z+i) = z - i$, i.e. $Zz + Zi = z - i$, i.e. $Zz - z = -Zi - i$, i.e. $z(Z-1) = -i(Z+1)$, i.e., pour $Z \neq 1$, $z = -i\dfrac{Z+1}{Z-1}$.

Puisque $Z \neq 0$, la valeur $k = 0$ est exclue et $n > 1$. Or, $Z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, avec $k \in [\![1, n-1]\!]$. On obtient donc

$$z = -i\frac{e^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1}{e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1}$$

Grâce à l'angle moitié, on obtient :

$$z = -i\frac{e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{i\frac{k\pi}{n}} + e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)}{e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)}$$

Et on fait apparaître les formules d'Euler au numérateur (en multipliant et divisant par 2) et au dénominateur (en multipliant et divisant par $2i$), pour obtenir :

$$z=-i\frac{e^{i\frac{k\pi}{n}}\times 2\times\left(\dfrac{e^{i\frac{k\pi}{n}}+e^{-i\frac{k\pi}{n}}}{2}\right)}{2i\times e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(\dfrac{e^{i\frac{k\pi}{n}}-e^{-i\frac{k\pi}{n}}}{2i}\right)}$$

La quantité entre parenthèses au numérateur vaut $\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.

La quantité entre parenthèses au dénominateur vaut $\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.

Ainsi

$$z=-i\frac{2e^{i\frac{k\pi}{n}}\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)}{2ie^{i\frac{k\pi}{n}}\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)}$$

On simplifie le numérateur et le dénominateur par $2e^{i\frac{k\pi}{n}}$, et on obtient

$$z=-\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$$

Donc les solutions de l'équation sont de la forme

$$z=-\cot\left(\frac{k\pi}{n}\right),\text{ avec } k\in[\![1,n-1]\!] \text{ et } n>1.$$

3.7 Exercice n° 7

a) Déterminer les nombres complexes z non nuls tels que $z'=z+\dfrac{1}{z}$ soit un réel.

Posons $z=re^{i\alpha}$, avec $r>0$ et θ réel. Alors :

$$\begin{aligned}
z' &= re^{i\alpha}+\frac{1}{re^{i\alpha}}\\
&= re^{i\alpha}+\frac{1}{r}e^{-i\alpha}\\
&= r\cos(\alpha)+ir\sin(\alpha)+\frac{1}{r}\cos(-\alpha)+\frac{1}{r}i\sin(-\alpha)\\
&= r\cos(\alpha)+ir\sin(\alpha)+\frac{1}{r}\cos(\alpha)-\frac{1}{r}i\sin(\alpha)\\
&= \left(\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos(\theta)\right)+i\left(\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin(\theta)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} z' \in \mathbb{R} &\iff \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin\theta = 0 \\ &\iff r - \frac{1}{r} = 0 \text{ ou } \sin\theta = 0 \\ &\iff r^2 - 1 = 0 \text{ ou } \sin\theta = 0 \\ &\iff (r = 1 \text{ ou } r = -1) \text{ ou } \sin\theta = 0 \end{aligned}$$

Or, $r > 0$, donc le cas $r = -1$ est exclu. Le cas $\sin\theta = 0$ signifie que $z \in \mathbb{R}$.

Donc $\left(z' = z + \frac{1}{z}\right.$ est réel$)$ si et seulement si (z est de module 1 ou z est réel).

b) Déterminer les nombres complexes z non nuls tels que $z' = z + \frac{1}{z}$ soit un imaginaire pur.

Par le même calcul qu'à la question précédente, on a

$$z' = \left(\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos(\theta)\right) + i\left(\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin(\theta)\right)$$

On peut traduire que le fait que z' est imaginaire pur (ce que l'on note $z' \in i\mathbb{R}$) ainsi

$$\begin{aligned} z' \in i\mathbb{R} &\iff \left(r - \frac{1}{r}\right) \cos\theta = 0 \\ &\iff r + \frac{1}{r} = 0 \text{ ou } \cos\theta = 0 \\ &\iff r^2 + 1 = 0 \text{ ou } \cos\theta = 0 \end{aligned}$$

Or, $r \in \mathbb{R}$, donc l'équation $r^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution. Ainsi z' est imaginaire pur si et seulement si $\cos\theta = 0$, i.e. z est imaginaire pur.

3.8 Exercice nº 8 : Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. Montrer alors l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* sur les intégrales :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Notons, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$P(\lambda) = \int_a^b (f(t) + \lambda g(t))^2\,\mathrm{d}t \tag{*}$$

On a $P(\lambda) = \int_a^b f^2(t) + 2\lambda f(t)g(t) + \lambda^2 g^2(t)\,\mathrm{d}t$. Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$P(\lambda) = \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t + 2\lambda\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \lambda^2\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Par la définition $(*)$, $P(\lambda)$ est l'intégrale d'une fonction positive, donc $P(\lambda) \geqslant 0$. De plus, $P(\lambda)$ est un polynôme du second degré (en λ) de signe constant (toujours positif). D'où $\Delta \leqslant 0$.

$$\begin{aligned}\text{On calcule } \Delta &= \left(2\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 - 4\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 4\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 - 4\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On obtient

$$\Delta \leqslant 0 \Longleftrightarrow 4\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 - 4\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$$

c'est-à-dire, en divisant chaque membre par -4 :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 - \left(\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant 0$$

d'où le résultat attendu.

3.9 Exercice n° 9

Pour tout entier $n > 0$, on sait que $S_1 = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et que $S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exprimer $S_4 = \sum_{h=0}^{n-1} (h+1)^4$ de deux façons pour déterminer $S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

On développe $(h+1)^4$:

$$(h+1)^4 = h^4 + 4h^3 + 6h^2 + 4h + 1$$

Par changement de variable, on a $S_4 = \sum_{h=1}^{n} h^4$.

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\sum_{h=0}^{n-1} (h+1)^4 &= \sum_{h=0}^{n-1} h^4 + 4h^3 + 6h^2 + 4h + 1 \text{ par le développement introductif} \\ \sum_{h=1}^{n} h^4 &= \sum_{h=0}^{n-1} h^4 + 4\sum_{h=0}^{n-1} h^3 + 6\sum_{h=0}^{n-1} h^2 + 4\sum_{h=0}^{n-1} h + \sum_{h=0}^{n-1} 1 \text{ par linéarité de la somme} \\ \sum_{h=0}^{n} h^4 - \sum_{h=0}^{n-1} h^4 &= 4\sum_{h=0}^{n-1} h^3 + 6\sum_{h=0}^{n-1} h^2 + 4\sum_{h=0}^{n-1} h + \sum_{h=0}^{n-1} 1\end{aligned}$$

On en conclut que $$n^4 = 4\sum_{h=0}^{n-1} h^3 + 6\sum_{h=0}^{n-1} h^2 + 4\sum_{h=0}^{n-1} h + \sum_{h=0}^{n-1} 1 \qquad (*)$$

On a :

- $\displaystyle\sum_{h=0}^{n-1} h^2 = \frac{(n-1)\,n\,(2n-2+1)}{6} = \frac{n\,(n-1)\,(2n-1)}{6}$

- $\displaystyle\sum_{h=0}^{n-1} h = \frac{n\,(n-1)}{2}$

- $\displaystyle\sum_{h=0}^{n-1} 1 = n$

On a donc $(*)$
$$\begin{aligned}
&\iff n^4 = 4\sum_{h=0}^{n-1} h^3 + 6\frac{n\,(n-1)\,(2n-1)}{6} + 4\frac{n\,(n-1)}{2} + n \\
&\iff n^4 = 4\sum_{h=0}^{n-1} h^3 + n\,(n-1)\,(2n-1) + 2n\,(n-1) + n \\
&\iff n^4 - n\,(n-1)\,(2n-1) - 2n\,(n-1) - n = 4\sum_{h=0}^{n-1} h^3 \\
&\iff n^4 - (n^2-n)\,(2n-1) - 2n^2 + 2n - n = 4\sum_{h=0}^{n-1} h^3 \\
&\iff n^4 - 2n^3 + n^2 + 2n^2 - n - 2n^2 + 2n - n = 4\sum_{h=0}^{n-1} h^3 \\
&\iff n^4 - 2n^3 + n^2 = 4\sum_{h=0}^{n-1} h^3 \\
&\iff n^4 - 2n^3 + n^2 = 4\left(\sum_{h=0}^{n} h^3 - n^3\right) \\
&\iff n^4 - 2n^3 + n^2 = 4\sum_{h=0}^{n} h^3 - 4n^3 \\
&\iff n^4 + 2n^3 + n^2 = 4\sum_{h=0}^{n} h^3 \\
&\iff \frac{1}{4}\,(n^4 + 2n^3 + n^2) = \sum_{h=0}^{n} h^3 \\
&\iff \frac{n^2\,(n^2+2n+1)}{4} = \sum_{h=0}^{n} h^3 \\
&\iff \frac{n^2\,(n+1)^2}{4} = \sum_{h=0}^{n} h^3
\end{aligned}$$

Donc $S_3 = \dfrac{n^2\,(n+1)^2}{4}$. **Remarque :** $S_3 = \left(\dfrac{n\,(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

3.10 Exercice n° 10

Montrer que pour tout réel x et tout entier naturel n, $|\sin(nx)| \leqslant n |\sin x|$.
Raisonnons par récurrence pour montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |\sin(nx)| \leqslant n |\sin x|$$

- Initialisation : pour $n = 0$, on a $|\sin(0)| = 0$ et $0 |\sin(x)| = 0$. Donc l'égalité est vraie pour $n = 0$.

- Hérédité : on suppose que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(nx)| \leqslant n |\sin x|$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Alors } |\sin((n+1)x)| & = & |\sin(nx)\cos(x) + \sin(x)\cos(nx)| \\ & \leqslant & |\sin(nx)| |\cos(x)| + |\sin(x)| |\cos(nx)| \text{ par inégalité triangulaire} \\ & \leqslant & |\sin(nx)| \times 1 + |\sin(x)| \times 1 \text{ car cos est borné par 1} \\ & \leqslant & n |\sin(x)| + |\sin(x)| \text{ par hypothèse de récurrence} \\ & \leqslant & (n+1) |\sin(x)| \end{array}$$

Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.

- Ainsi la propriété est vraie au rang $n = 0$ et est héréditaire. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(nx)| \leqslant n |\sin x|$$