Prépa à la prépa - juin 2020 - Correction

4 Séance n° 4

4.1 Exercice n° 1

Soit a, b, c et d quatre nombres rationnels tels que $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$. Montrer que $a=c$ et $b=d$.

On a
$$a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2},$$
c'est-à-dire $a-c=\sqrt{2}\,(d-b)$.

- Si $b-d=0$, alors $0=c-a$, ce qu'il fallait démontrer.
- Supposons par l'absurde que $d\neq b$. Alors $\sqrt{2}=\dfrac{a-c}{d-b}$. Or, $\dfrac{a-c}{d-b}\in\mathbb{Q}$. Ainsi $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$. D'où contradiction car on a montré que $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

On en conclut que $b=d$ et $c=a$, ce que l'on voulait démontrer.

4.2 Exercice n° 2

Déterminer une équation du troisième degré dont $\sqrt[3]{20+12\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ est solution, pour en déduire la valeur numérique.
Notons $x=\sqrt[3]{20+12\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$, et posons $a=\sqrt[3]{20+12\sqrt{2}}$ et $b=\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.
Ainsi $x=a+b$

$$\begin{aligned}
x^3=(a+b) &= a^3+3ab^2+3a^2b+b^3\\
&= 20+14\sqrt{2}+3ab\,(a+b)+20-14\sqrt{2}\\
&= 40+3ab\times x
\end{aligned}$$

Calculons ab :

$$\begin{aligned}
ab &= \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\times\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\\
&= \sqrt[3]{400+196\times 2}\\
&= \sqrt[3]{8}\\
&= 2
\end{aligned}$$

Donc $x^3=40+6x$. D'où l'équation

$$x^3-6x-40=0 \qquad \text{(E)}$$

On cherche à trouver une valeur numérique de x, qui est solution de (E). La calculatrice donne $x = 4$. On va montrer que 4 est l'unique solution réelle de (E).

On peut alors affirmer qu'il existe trois réels u, v et w tels que

$$x^3 - 6x - 40 = (x-4)\left(ux^2 + vx + w\right)$$

Posons alors la division euclidienne de $x^3 - 6x - 40$ par $x - 4$:

$$\begin{array}{rrrr|lll}
x^3 & & -6x & -40 & x & -4 & \\
\cline{5-7}
-\,(x^3 & -4x^2) & & & x^2 & +4x & +10 \\
\cline{1-2}
 & 4x^2 & -6x & -40 & & & \\
 & -\,(4x^2 & -16x) & & & & \\
\cline{2-3}
 & & 10x & -40 & & & \\
 & & -\,(10x & -40) & & & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 & & &
\end{array}$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^3 - 6x - 40 = (x-4)\left(x^2 + 4x + 10\right)$$

On a montré que x est solution de $x^3 - 6x - 40 = 0$, donc $x = 4$ ou x est solution de l'équation $x^2 + 4x + 10 = 0$.
Or, pour ce dernier cas, $\Delta = 16 - 40 = -24 = \left(2i\sqrt{6}\right)^2$, donc ce trinôme n'admet pas de racines réelles.

Or, $x \in \mathbb{R}$, donc la seule solution réelle est 4, et donc $x = 4$.

4.3 Exercice n° 3

Soit un réel $c > 0$. Pour tout réel x, on pose

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + cx^2}}$$

On note f^n la composée de n fois la fonction f. Exprimer $f^n(x)$ en fonction de n et x.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f^2(x) = f\left(f\left(x\right)\right) = f\left(\frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}\right) = \frac{f(x)}{\sqrt{1 + c\left(f(x)\right)^2}}$$

D'où $\dfrac{f(x)}{\sqrt{1 + c\left(f(x)\right)^2}} = \dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+cx^2}}}{\sqrt{1 + c\dfrac{x^2}{1+cx^2}}} = \dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+cx^2}}}{\sqrt{\dfrac{1+cx^2+cx^2}{1+cx^2}}} = \dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+cx^2}}}{\dfrac{\sqrt{1+2cx^2}}{\sqrt{1+cx^2}}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+2cx^2}}$.

On conjecture que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}$$

Montrons que cette propriété est vraie par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- Initialisation : l'initialisation a été faite au-dessus, au moment de la conjecture.

  « **Formule de passage** » **:** $f^{n+1} = f(f^n) = f^n(f)$.

- Hérédité : supposons que, pour un certain entier n, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}$$

  Alors la formule de passage donne $f^{n+1}(x) = f^n(f(x))$, i.e.

$$f^{n+1}(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+cn(f(x))^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}}{\sqrt{1+nc\frac{x^2}{1+cx^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}}{\sqrt{\frac{1+cx^2+ncx^2}{1+cx^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}}{\frac{\sqrt{1+(n+1)cx^2}}{\sqrt{1+cx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+(n+1)cx^2}}$$

  Donc la propriété est héréditaire.

- Ainsi, la propriété est vraie au rang $n=1$ et est héréditaire. On en conclut que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}$$

4.4 Exercice n° 4

Pour tout réel $a > 0$ et différent de 1, on appelle « logarithme de base a » la fonction, notée $\log_a$ définie par

$$\forall x > 0, \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Pour $a = 10$, on note simplement log le logarithme en base 10, appelé *logarithme décimal*.

On rappelle aussi que si a est un réel strictement positif et b un réel quelconque, on définit $a^b = e^{b \ln a}$.

a) Montrer que, pour a, b et c tels que cette égalité ait un sens, $a^{\log_b(x)} = c^{\log_b(a)}$.

   Montrer que $a^{\log_b(x)} = c^{\log_b(a)}$ revient à montrer que $a^{\frac{\ln c}{\ln b}} = c^{\frac{\ln a}{\ln b}}$, et cela revient à montrer que

$$e^{\frac{\ln c}{\ln b} \times \ln a} = e^{\frac{\ln a}{\ln b} \times \ln c}$$

   Par permutation des deux termes aux numérateurs (commutativité de la multiplication), on voit que la dernière égalité est vraie, et par les équivalences mentionnées, on a l'égalité que l'on voulait démontrer.

b) En déduire la résolution de l'équation $5^{\log(x)} = 50 - x^{\log(5)}$.
On a $5^{\log x} = 5^{\frac{\ln x}{\ln 10}}$.

Or, par le point précédent, $5^{\frac{\ln x}{\ln 10}} = x^{\frac{\ln 5}{\ln 10}}$, d'où $5^{\frac{\ln x}{\ln 10}} = x^{\log 5}$.

L'équation devient donc $5^{\log x} = 50 - 5^{\log x}$, i.e. $2\left(5^{\log x}\right) = 50$, i.e. $5^{\log x} = 25$.
Or, $\log_5(25) = \log_5(5^2)$.
Ainsi l'équation précédente est équivalente à $5^{\log x} = 5^2$, i.e. $\log x = 2$, et donc $x = 10^2 = 100$.

4.5 Exercice n° 5

Montrer que $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ est un nombre irrationnel.

Supposons par l'absurde que $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ est un nombre rationnel, i.e.

$$\frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{p}{q}$$

avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et p et q premiers entre eux.

Alors, par l'égalité du produit en croix, $q \ln 3 = p \ln 2$, i.e. $e^{q \ln 3} = e^{p \ln 2}$, ce que l'on note $2^q = 3^p$.

Le membre de gauche de l'égalité est pair (car $q \neq 0$) et le membre de droite de l'égalité est impair. D'où contradiction. Ainsi $\dfrac{\ln 3}{\ln 2} \notin \mathbb{Q}$.

4.6 Exercice n° 6

Pour n entier positif, on définit les *nombres de Fermat* comme les entiers de la forme

$$F_n = 2^{(2^n)} + 1$$

Montrer qu'ils sont tous deux à deux premiers entre eux.

Soient n et m deux entiers naturels tels que $n < m$. Posons $m = n + k$, avec $k > 0$. Alors

$$F_m = 2^{\left(2^{n+k}\right)} + 1 = \left(2^{2^n}\right)^{2^k} + 1 = (F_n - 1)^{2^k} + 1$$

Montrons que le PGCD de F_n et F_m est 1.

$k > 0$, donc $2^k \neq 1$. En développant l'expression $(F_n - 1)^{2^k}$ grâce à la formule du binôme de Newton, on obtient $2^k + 1$ termes ayant tous F_n en facteurs, sauf le dernier, qui est 1, c'est-à-dire de la forme $q \times F_n + 1$. Donc, $(F_n - 1)^{2^k} + 1$ vaut $q \times F_n + 2$, et donc

$$F_m = q \times F_n + 2$$

Or, le PGCD de F_n et de F_m divise toute combinaison linéaire de F_n et de F_m, en particulier $F_m - qF_n$. Ainsi, le PGCD de F_n et de F_m divise 2, donc vaut 1 ou 2.

Or, F_m est toujours un nombre impair. Or, $2^n > 0$, donc 2^{2^n} est pair, et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est impair. Donc $PGCD\,(F_n, F_m) \neq 2$.

Ainsi le PGCD de F_n et de F_m est 1, et donc F_n et F_m sont premiers entre eux. Ceci est vrai pour tout n et pour tout m entier, d'où le résultat attendu.

4.7 Exercice n° 7

Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $-16 + 30i$.

Posons $z = -16 + 30i$. Le but de l'exercice est de déterminer les couples $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tels que $(x + iy)^2 = a + ib$. Il vient

$$x^2 + 2ixy - y^2 = \left(x^2 - y^2\right) + i \times (2xy)$$

On identifie les coefficients aux valeurs entre parenthèses, et on obtient le système :

$$\begin{cases} -16 = x^2 - y^2 \\ 30 = 2xy \end{cases}$$

On peut rajouter une troisième équation à ce système. On a $z^2 = -16 + 30i$, d'où

$$\left|z^2\right| = |-16 + 30i| = \sqrt{(-16)^2 + 30^2} = \sqrt{256 + 900} = \sqrt{1156} = 34$$

et

$$\left|z^2\right| = |z|^2 = x^2 + y^2$$

Ainsi, on obtient $x^2 + y^2 = 34$, d'où le système

$$\begin{cases} -16 = x^2 - y^2 & (1) \\ 34 = x^2 + y^2 & (2) \\ 30 = 2xy & (3) \end{cases}$$

- $(1) + (2)$ donne $2x^2 = 18$, i.e. $x^2 = 9$
- $(1) - (2)$ donne $2y^2 = 50$, i.e. $y^2 = 25$
- (3) nous permet d'affirmer que $xy = 15$, i.e. que x et y sont de même signe.

Ainsi on a deux couples (x, y) qui conviennent :

$$(3, 5) \text{ et } (-3, -5)$$

On en conclut que les racines carrées de $z = -16 + 30i$ sont

$$z_1 = 3 + 5i \text{ et } z_2 = -3 - 5i$$

Remarque : Examinons le cas général :

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $z = a + ib$. Le but de l'exercice est donc de déterminer les réels x et y tels que $z = (x+iy)^2$. On développe, pour obtenir

$$z = x^2 + 2ixy - y^2 = \left(x^2 - y^2\right) + i\,(2xy)$$

On identifie les coefficients a et b aux valeurs entre parenthèses. On a aussi l'égalité

$$x^2 + y^2 = \left|(x+iy)^2\right| = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Il vient alors, en notant m le module de z, le système suivant

$$\begin{cases} a = x^2 - y^2 & (1) \\ m = x^2 + y^2 & (2) \\ b = 2xy & (3) \end{cases}$$

- $(2) + (1)$ donne $m + a = 2x^2$, i.e. $x^2 = \dfrac{m+a}{2}$, i.e. $x = \sqrt{\dfrac{m+a}{2}}$ ou $x = -\sqrt{\dfrac{m+a}{2}}$.
- $(2) - (1)$ donne $m - a = 2y^2$, i.e. $y^2 = \dfrac{m-a}{2}$, i.e. $y = \sqrt{\dfrac{m-a}{2}}$ ou $y = -\sqrt{\dfrac{m-a}{2}}$.
- La troisième équation permet de savoir si x et y sont du même signe suivant le signe de b. Ainsi, on en conclut que
  - Si $b = 0$, alors $z \in \mathbb{R}$, et donc les racines carrées de z sont
    - * Si $x > 0$, $z_1 = \sqrt{x}$ et $z_2 - \sqrt{x}$.
    - * Si $x < 0$, $z_1 = i\sqrt{-x}$ et $z_2 = -i\sqrt{-x}$.
  - Si $b > 0$, alors x et y sont du même signe, et les racines carrées de $z = a + ib$ sont
  $$z_1 = \sqrt{\frac{m+a}{2}} + i\sqrt{\frac{m-a}{2}} \text{ et } z_2 = -\sqrt{\frac{m+a}{2}} - i\sqrt{\frac{m-a}{2}} \quad \text{avec } m = \sqrt{a^2+b^2}$$
  - Si $b < 0$, alors x et y sont de signes opposés, et les racines carrées de $z = a + ib$ sont
  $$z_1 = \sqrt{\frac{m+a}{2}} - i\sqrt{\frac{m-a}{2}} \text{ et } z_2 = -\sqrt{\frac{m+a}{2}} + i\sqrt{\frac{m-a}{2}} \quad \text{avec } m = \sqrt{a^2+b^2}$$

Dans le cas particulier où $z = -16 + 30i$, on a que $30 > 0$.

On calcule $m = \left|(-16)^2 + 30^2\right| = 256 + 900 = 1156 = 34^2$ et les quantités

$$\sqrt{\frac{34-16}{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3 \text{ et } \sqrt{\frac{34+16}{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

Ainsi les racines carrées de z sont

$$z_1 = 3 + 5i \text{ et } z_2 = -3 - 5i$$

4.8 Exercice n° 8

Pour tout x réel, on pose $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que f est une fonction impaire et que $f'(x) + 2xf(x) = 1$.

- Montrons que f est une fonction impaire. f est définie sur $\mathbb{R}$ (qui est centré en 0) et on a

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} \int_0^{-x} e^{t^2}\,\mathrm{d}t = e^{-x^2} \times \left(-\int_{-x}^0 e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right) \overset{(*)}{=} -e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t = -f(x)$$

  où l'égalité $(*)$ est obtenue car $\phi : t \longmapsto e^{t^2}$ est paire.

  Ainsi f est bien une fonction impaire.

- On dérive f, qui est de la forme uv, avec $u(x) = e^{-x^2}$ et $v(x) = \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

  Remarque : v est la primitive de ϕ qui s'annule en 0.

  Alors $u'(x) = -2xe^{-x^2}$ et $v'(x) = e^{x^2}$. Il vient

$$f(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -2xe^{-x^2} + e^{-x^2}e^{x^2} = -2xf(x) + 1$$

  On obtient $f'(x) = -2xf(x) + 1$, i.e. $f'(x) + 2xf(x) = 1$, ce qu'il fallait démontrer.

4.9 Exercice n° 9 : identité de Catalan

Montrer l'*identité de Catalan* :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$$

On va raisonner par récurrence pour montrer l'identité de Catalan, à savoir

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

- Initialisation : pour $n = 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$.
  Ainsi l'identité est vraie pour $n = 1$.

- On suppose que, pour un certain $n \geqslant 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2(n+1)-1} \frac{(-1)^k}{k+1} &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)} \quad \text{en sortant le terme de rang } n+1 \\
&= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2(n+1)} \quad \text{en rentrant le terme de rang } 2n+1 \\
&= \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2(n+1)} \qquad \text{car } \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2(n+1)} \\
&= \sum_{k=n+2}^{2(n+1)} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

  Donc la propriété est héréditaire.

- La propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire. Ainsi, on a montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$$

4.10 Exercice n° 10 : une formule d'Euler pour démontrer une formule de Viète

Soit x un réel de l'intervalle $]0,\pi[$ et soit un entier n strictement supérieur 1.
Exprimer autrement $P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$ pour en déterminer, en fonction de x, la limite quand n tend vers l'infini.

En déduire $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)\right)$.

Soit x un nombre réel qui n'est pas de la forme $k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

On sait que, pour tout $X \in \mathbb{R}$, $\sin(2X) = 2\cos(X)\sin(X)$. En appliquant cette égalité à $X = \frac{x}{2^k}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\sin\left(2\times\frac{x}{2^k}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$, et donc

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \frac{\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)} = \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

On fait le produit de ces égalités pour chaque $k \in [\![1,n]\!]$, et on obtient

$$P_n(x) = \frac{\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{2^n \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{x}{2^k}\right)} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{2^n \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{x}{2^k}\right)} = \frac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

où la première égalité se trouve par décalage d'indice et la seconde égalité par simplifications successives.

On peut transformer l'écriture de $P_n(x)$ en

$$P_n(x) = \frac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} = \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{2^n}{x}\times\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} = \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}}$$

On sait que $\lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$. Pour $u = \frac{x}{2^n}$, qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} = 1$, donc la limite de $P_n(x)$ quand n tend vers l'infini est celle de $\frac{\sin x}{x}$.

On en conclut que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} \ln(P_n(x))$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)\right) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$.