Prépa à la prépa - juin 2020 - Correction

5 Séance n° 5

5.1 Exercice n° 1

Résoudre l'équation

$$4^x + 10^x + 25^x \tag{E}$$

$$\begin{aligned}
\text{On a } (E) &\iff \frac{4^x}{25^x} + \frac{10^x}{25^x} = 1 \\
&\iff \left(\frac{4}{25}\right)^x + \left(\frac{10}{25}\right)^x = 1 \\
&\iff \left(\left(\frac{2}{5}\right)^2\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x = 1 \\
&\iff \left(\left(\frac{2}{5}\right)^x\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^x = 1
\end{aligned}$$

On pose $X = \left(\frac{2}{5}\right)^x$. L'équation devient $X^2 + X = 1$, i.e. $X^2 + X - 1 = 0$.

On a $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$.

On a donc deux solutions réelles :

$$X_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } X_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Il suffit donc résoudre successivement $\left(\frac{2}{5}\right)^x = X_1$ et $\left(\frac{2}{5}\right)^x = X_2$.
Or, $X_1 < 0$, donc la première équation n'a pas de solution.

On suffit donc de résoudre $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. On a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} &\iff x \ln\left(\frac{2}{5}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \\
&\iff x = \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}.
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de (E) est

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} \right\}$$

5.2 Exercice n° 2

Pour tout réel x différent de 1, on pose $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x + 5}{(x-1)^2 (x^2+1)}$

a) Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que $f(x)$ peut aussi s'écrire

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx}{x^2+1}$$

On cherche à déterminer a, b et c tels que

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 5}{(x-1)^2 (x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx}{x^2+1}$$

Il s'agit d'une méthode appelée *décomposition en éléments simples.*
On va raisonner par identification :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx}{x^2+1} &= \frac{a(x-1)(x^2+1)}{(x-1)^2(x^2+1)} + \frac{b(x^2+1)}{(x-1)^2(x^2+1)} + \frac{cx(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)} \\ &= \frac{ax^3 + ax - ax^2 - a + bx^2 + b + cx^3 - 2cx^2 + cx}{(x-1)^2(x^2+1)} \\ &= \frac{(a+c)x^3 + (-a+b-2c)x^2 + (a+c)x + (-a+b)}{(x-1)^2(x^2+1)} \end{aligned}$$

Par identification, il vient le système

$$\begin{cases} a + c = 1 & (L_1) \\ -a + b - 2c = 1 & (L_2) \\ a + c = 1 & (L_4) \\ -a + b = 5 & (L_3) \end{cases}$$

On remarque que les équations (L_1) (L_4) sont identiques. On a donc le système et les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} a + c = 1 & (L_1) \\ -a + b - 2c = 1 & (L_2) \\ -a + b = 5 & (L_3) \end{cases} \iff \begin{cases} a + c = 1 & (L_1) \\ -a + b - 2c = 1 & (L_2) \\ 2c = 4 & (L_2 - L_3) \end{cases} \iff \begin{cases} c = 2 \\ a = 1 - c = -1 \\ b = 5 + a = 4 \end{cases}$$

Ainsi $f(x) = \dfrac{-1}{x-1} + \dfrac{4}{(x-1)^2} + \dfrac{2x}{x^2+1}$.

b) En déduire la primitive de f qui s'annule en 0.

On cherche la primitive qui s'annule en 0. Cherchons l'ensemble des primitives :

$$F(x) = -\ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + \ln\left|x^2+1\right| + c, \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$, donc

$$F(x) = -\ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + \ln\left(x^2+1\right), \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

On veut $F(0) = 0$, d'où $-\ln 1 + 4 + \ln 1 + c = 0$, et donc $c = -4$.

Ainsi la primitive cherchée est $F : x \longmapsto -\ln|x-1| - \dfrac{4}{x-1} + \ln(x^2+1) - 4$.

5.3 Exercice n° 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \neq 0, f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ et } f(0) = 0$$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout x non nul.

f est continue sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions continues.

f est continue en 0 si et seulement si $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

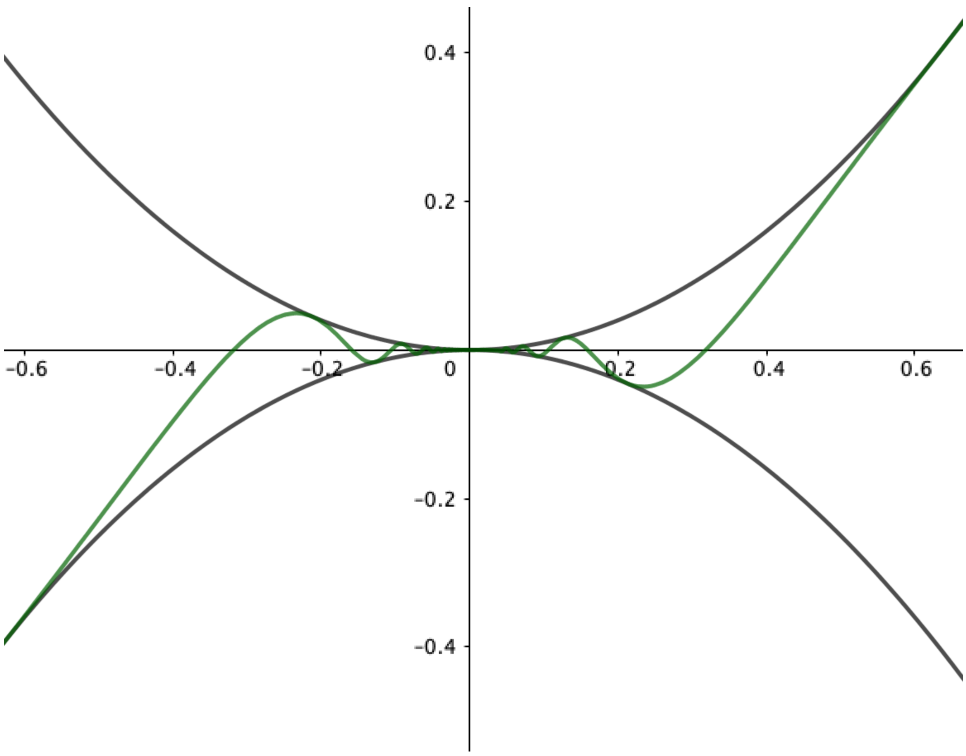
Dans le cas de notre exercice, f est continue en 0 si et seulement si $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

On sait que $\forall x \neq 0, -1 \leqslant \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1$. On multiplie par $x^2 > 0$, et on a

$$-x^2 \leqslant f(x) \leqslant x^2$$

Or, $\lim_{x \to 0} x^2 = \lim_{x \to 0} (-x^2) = 0$. Donc, d'après le théorème d'encadrement (appelé aussi théorème des gendarmes), on a

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$



b) Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables, et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Pour calculer $f'(0)$, formons le taux de de variation de f entre 0 et x :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}, \text{ avec } x \neq 0 \\ &= \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} \text{ avec } x \neq 0 \\ &= x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ avec } x \neq 0 \end{aligned}$$

On a $\lim\limits_{x \to 0} \tau = 0$, par produit d'une fonction bornée par une fonction tendant vers 0.

D'où $f'(0) = 0$.

c) Que peut-on dire de la limite de $f'(x)$ quand x tend vers 0 ?

$2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers 0, mais $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0.

Donc $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ n'existe pas.

Remarque : On montre que, dans ce type d'exercice, si f' a une limite finie quand x tend vers 0, alors $f'(0)$ existe, et c'est la bonne valeur. Cependant, si f' n'a pas de limite, il faut étudier la dérivabilité grâce à la limite du taux de variation.

5.4 Exercice n° 4

Pour tout réel $x \neq 0$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f.

Exprimer $f^{(n)}(x)$ en fonction de n et de x.

Soit la fonction $f : x \longmapsto f(x) = \dfrac{1}{x}$. On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$, donc on dérive f sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = -1 \times \left(-\frac{2x}{x^4}\right) = \frac{2}{x^3}$$

$$f'''(x) = f^{(3)}(x) = 2 \times \left(-\frac{3x^2}{x^6}\right) = -\frac{6}{x^4}$$

$$f^{(4)}(x) = -6 \times \left(-\frac{-4x^3}{x^8}\right) = \frac{24}{x^5}$$

On conjecture que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

Montrons-le par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

- Initialisation : $f^{(1)}(x) = f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{(-1)^1 \times 1!}{x^{1+1}}$.
  Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

- Hérédité : Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on a

  $$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

  On a

  $$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x)$$

  Donc, par hypothèse de récurrence, on dérive $x \longmapsto \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$. Cette dérivée est

  $$x \longmapsto (-1)^n n! \times g'(x), \text{ où } g(x) = \frac{1}{x^{n+1}}$$

  On en conclut que

  $$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! \times \frac{-(n+1)x^n}{\left(x^{n+1}\right)^2} = \frac{\overbrace{(-1)^n \times (-1)}^{(-1)^{n+1}} \times \overbrace{n! \times (n+1)}^{(n+1)!} \times x^n}{x^{2n+2}} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}}$$

- Donc la propriété est vraie au rang $n = 1$ et est héréditaire. Ainsi

  $$\forall n \in \mathbb{N}^*, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

5.5 Exercice n° 5 : Formule de Legendre

Déterminer le nombre de zéros qui terminent 1000!.

Cela revient à chercher le nombre de fois (au maximum !) que l'on peut mettre 10 en facteur. Si 1000 ! est factorisable par 10^k et pas par 10^{k+1}, alors 1000 ! se termine par k zéros exactement. Regardons les premiers factoriels :

- 2 ! = 2
- 3 ! = 6
- 4 ! = 24
- 5 ! = 120
- 6 ! = 720
- 7 ! = 5 040
- 8 ! = 40 320
- 9 ! = 362 880
- 10 ! = 3 628 800

On remarque que les changements ont lieu à chaque nouveau multiple de 5. Il est inutile de regarder les multiples de 2, puisqu'il y en a au moins 2 pour chaque multiple de 5.

Pour 1000, on cherche le nombre de multiple de 5 : $\frac{1000}{5} = 200$

Donc il y a 200 multiples de 5, et donc on aura 200 zéros qui viennent de la « contribution » des multiples de 5.

De même, chaque multiple de 25 va apporter une nouvelle contribution supplémentaire. $\frac{1000}{25} = 40$, donc il y a 40 multiples de 25, et donc on aura 40 zéros qui viennent de la « contribution » des multiples de 25.

De même, chaque multiple de 125 va apporter une nouvelle contribution supplémentaire. $\frac{1000}{125} = 8$, donc il y a 8 multiples de 125, et donc on aura 8 zéros qui viennent de la « contribution » des multiples de 125.

De même, chaque multiple de 625 va apporter une nouvelle contribution supplémentaire. $\frac{1000}{625} = 1,6$. Ainsi, il y a 1 multiple de 625, et donc on aura 1 zéro qui vient de la « contribution » du multiple de 625.

Ainsi 1000 ! se termine par 249 zéros.

Remarque 1 **:** la formule générale dit que le nombre de zéros terminant n ! est

$$\sum_{k=1}^{+\infty} E\left(\frac{n}{5^k}\right)$$

où $E(x)$ est la partie entière de x.

Remarque 2 **:** La borne supérieure du Σ est en fait un nombre fini. On écrit $+\infty$ pour ne pas avoir à la préciser. Cependant, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{N}^*, 5^k > n \iff k \ln 5 > \ln n \iff k > \frac{\ln n}{\ln 5}$$

Donc la formule plus précise est $\displaystyle\sum_{k=1}^{E\left(\frac{\ln n}{\ln 5}\right)} E\left(\frac{n}{5^k}\right)$

5.6 Exercice n° 6

Soient a et b deux nombres complexes tels que $|a| < 1$ et $|b| < 1$. Montrer que

$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| < 1$$

On va montrer que l'égalité est vraie en montrant que

$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|^2 < 1$$

Or, $\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|^2 = \frac{|a-b|^2}{|1-\overline{a}b|^2}$, donc on va montrer que $\frac{|a-b|^2}{|1-\overline{a}b|^2} < 1$, c'est-à-dire, comme $|1-\overline{a}b|^2$ est strictement positif, $|a-b|^2 < |1-\overline{a}b|^2$, ou encore que

$$|a-b|^2 - |1-\overline{a}b|^2 < 0$$

- On a $|a-b|^2 = (a-b)\left(\overline{a-b}\right) = (a-b)\left(\overline{a}-\overline{b}\right) = |a|^2 + |b|^2 - 2\Re e\left(\overline{a}b\right)$.
- On a $|1-\overline{a}b|^2 = (1-\overline{a}b)\left(\overline{1-\overline{a}b}\right) = (1-\overline{a}b)\left(1+a\overline{b}\right) = 1 + |a|^2|b|^2 - 2\Re e\left(\overline{a}b\right)$

Il vient

$$|a-b|^2 - |1-\overline{a}b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 1 - |a|^2|b|^2$$

i.e.

$$|a-b|^2 - |1-\overline{a}b|^2 = -\left(-|a|^2 - |b|^2 + 1 + |a|^2|b|^2\right)$$

i.e.

$$|a-b|^2 - |1-\overline{a}b|^2 = -\left(1-|a|^2\right)\left(1-|b|^2\right)$$

On obtient :

$$|a-b|^2 - |1-\overline{a}b|^2 < 0$$

Or, par hypothèse, $|a| < 1$ et $|b| < 1$, i.e. $|a|^2 < 1$ et $|b|^2 < 1$, et donc $1-|a^2| > 0$ et $b^2 - 1 > 0$. D'où

$$\left(1-|a|^2\right)\left(1-|b|^2\right) > 0$$

Et donc

$$-\left(1-|a|^2\right)\left(1-|b|^2\right) < 0$$

Il vient, par les équivalences précisées au début de la correction de cet exercice,

$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| < 1$$

5.7 Exercice n° 7

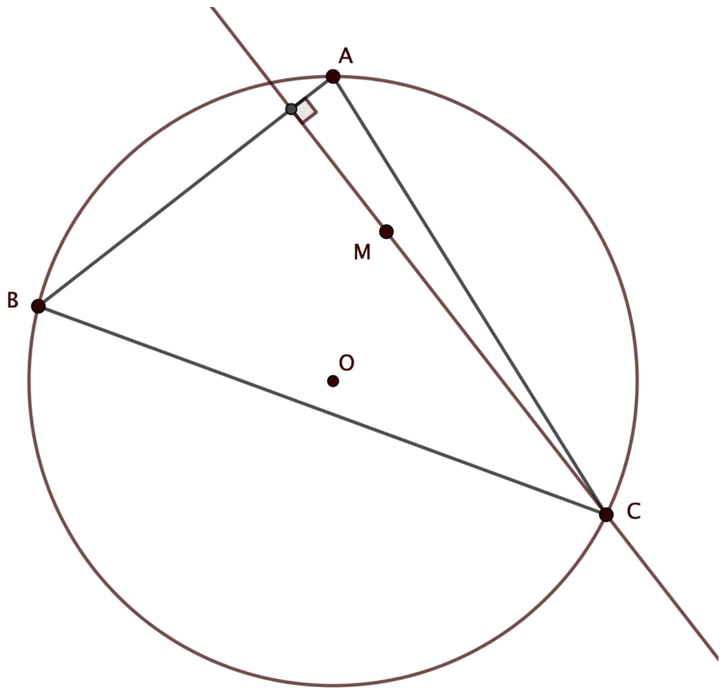
Soient A, B et C trois points distincts du cercle trigonométrique, d'affixes respectives a, b et c. Montrer que le point M d'affixe z appartient à la hauteur issue de C du triangle ABC si et seulement si

$$\overline{z} = \frac{z}{ab} + \frac{1}{c} - \frac{c}{ab}$$

Rappel : Soient a, b, c et d des nombres complexes tels que $a \neq b$ et $c \neq d$. On a

$$\left|\frac{d-c}{b-a}\right| = \frac{CD}{AB} \text{ et } \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ici : $(CM) \perp (AB)$, i.e. $\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ modulo 2π.



On s'intéresse alors à $\frac{z-c}{b-a}$. On veut que l'argument soit de la forme précitée, i.e. $\frac{z-c}{b-a} \in i\mathbb{R}$.

Or, dire qu'un nombre complexe Z est un imaginaire pur revient à dire que $\overline{Z} = -Z$.

En traduisant les hypothèses, on obtient :

- $|a| = |b| = |c| = 1$, i.e $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = 1$, ou encore $\overline{a} = \frac{1}{a}$ et $\overline{b} = \frac{1}{b}$ et $\overline{c} = \frac{1}{c}$ $\quad (*)$
- On a $\frac{z-c}{b-a} \in i\mathbb{R}$, donc $\frac{z-c}{b-a} = -\overline{\left(\frac{z-c}{b-a}\right)}$

Alors i.e. $\dfrac{z-c}{b-a} = -\overline{\left(\dfrac{z-c}{b-a}\right)}$

i.e. $\dfrac{z-c}{b-a} = -\dfrac{\overline{z-c}}{\overline{b-a}}$

i.e. $\dfrac{z-c}{b-a} = -\dfrac{\overline{z}-\overline{c}}{\overline{b}-\overline{a}}$

i.e. $\dfrac{z-c}{b-a} = -\dfrac{\overline{z}-\frac{1}{c}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$ par $(*)$

i.e. $\dfrac{z-c}{b-a} = -\dfrac{\overline{z}-\frac{1}{c}}{\frac{a-b}{ab}}$

i.e. $\dfrac{z-c}{b-a} = -\left(\overline{z}-\dfrac{1}{c}\right)\times\dfrac{ab}{a-b}$

i.e. $\dfrac{z-c}{b-a} = \left(\overline{z}-\dfrac{1}{c}\right)\times\dfrac{ab}{b-a}$

i.e. $z-c = \left(\overline{z}-\dfrac{1}{c}\right)\times ab$

i.e. $\dfrac{z-c}{ab} = \left(\overline{z}-\dfrac{1}{c}\right)$

i.e. $\dfrac{z-c}{ab} + \dfrac{1}{c} = \overline{z}$

On en conclut que $\overline{z} = \dfrac{z}{ab} - \dfrac{c}{ab} + \dfrac{1}{c}$.

5.8 Exercice n° 8

a) Déterminer pour quelles valeurs de x, $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ existe

Notons $f : t \longmapsto \dfrac{1}{\ln t}$.

- Pour $x < 0$, on a $t < 0$, et donc la fonction f n'est pas définie.
- Pour $x = 0$, l'intégrale n'a pas de sens.
- Pour $0 < x < 1$, on a $x^2 < x$, et donc $[x^2, x] \subset]0, 1[$. Donc la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\ln t}$ est continue sur $[x^2, x]$, et donc $F(x)$ existe.
- Pour $x = 1$, l'intégrale n'a pas de sens.
- Pour $x > 1$, on a $x < x^2$, et donc $[x, x^2] \subset]1, +\infty[$. Donc la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\ln t}$ est continue sur $[x, x^2]$, et donc $F(x)$ existe.

Donc F est définie sur $\mathcal{D} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

b) Calculer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers 1.

- On s'intéresse d'abord à la limite à droite quand x tend vers 1. Soit $t \in [x, x^2]$. On a $1 < x \leqslant t \leqslant x^2$, et donc $t > 0$. Ainsi $\ln(t) > 0$.
  On en déduit que $\dfrac{1}{t\ln(t)} > 0$.

  En multipliant chacun des membres de l'équation $x \leqslant t \leqslant x^2$ par $\dfrac{1}{t\ln(t)} > 0$, on obtient
  $$x\frac{1}{t\ln(t)} \leqslant t\frac{1}{t\ln(t)} \leqslant x^2\frac{1}{t\ln(t)}$$
  Par croissance de l'intégrale, on peut affirmer que
  $$\int_x^{x^2} x\frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x^2} t\frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x^2} x^2\frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$
  c'est-à-dire, par définition de f et par linéarité de l'intégrale
  $$x\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant x^2\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t \qquad (*)$$
  Il faut donc calculer $I = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$. Pour $x \in [1, +\infty[$, la fonction ln est strictement positive.

  $$I = \int_x^{x^2} \frac{1}{t} \times \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \int_x^{x^2} \frac{\ln'(t)}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t = [\ln(\ln(t))]_x^{x^2} = \ln\left(\ln\left(x^2\right)\right) - \ln(\ln(x))$$
  Par les propriétés de la fonction ln, on obtient :
  $$I = \ln(2\ln(x)) - \ln(\ln(x)) = \ln(2) + \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(x)) = \ln 2$$
  D'où
  $$\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \ln 2 \qquad (\mathrm{I})$$
  On réinjecte cette valeur dans $(*)$, et on obtient
  $$x\ln 2 \leqslant f(x) \leqslant x^2\ln 2$$
  On a $\lim\limits_{x\to 1^+} x\ln 2 = \lim\limits_{x\to 1^+} x^2\ln 2 = \ln 2$. Donc, d'après le théorème d'encadrement, on en déduit que $f(x)$ tend vers $\ln 2$ quand x tend vers 1^+.

- On s'intéresse ensuite à la limite à gauche quand x tend vers 1, i.e. la limite en 1^-. Puisque $x \in]0, 1[$, on a $x^2 < x$. Soit $t \in [x^2, x]$. On a $0 < x^2 \leqslant t \leqslant x < 1$, et donc $t > 0$. Ainsi $\ln(t) < 0$. On en déduit que $\dfrac{1}{t\ln(t)} < 0$.

En multipliant chacun des membres de l'équation $x^2 \leqslant t \leqslant x$ par $\dfrac{1}{t\ln(t)} < 0$, on obtient

$$x^2 \frac{1}{t\ln(t)} \geqslant t\frac{1}{t\ln(t)} \geqslant x\frac{1}{t\ln(t)}$$

Par croissance de l'intégrale, on peut affirmer que

$$\int_{x^2}^{x} x^2 \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{x^2}^{x} t\frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{x^2}^{x} x\frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire, par linéarité de l'intégrale

$$x^2\int_{x^2}^{x} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{x^2}^{x} t\frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t \geqslant x\int_{x^2}^{x} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$

et en inversant les bornes, on a

$$-x^2\int_{x}^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t \geqslant -f(x) \geqslant -x\int_{x}^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$

D'où, en multipliant par -1 chaque membre de cette équation :

$$x^2\int_{x}^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant x\int_{x}^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$

D'après (I), cette double inéquation devient

$$x^2\ln 2 \leqslant f(x) \leqslant x\ln 2$$

Or, $\lim\limits_{x\to 1^+} x^2\ln 2 = \lim\limits_{x\to 1^+} x\ln 2 = \ln 2$. Donc, d'après le théorème d'encadrement, on en déduit que $f(x)$ tend vers $\ln 2$ quand x tend vers 1^-.

Donc, on peut dire que la limite de $F(x)$ quand x tend vers 1 est $\ln 2$.

c) (Bonus) Calculer la dérivée de F.

On a $f'(t) = \dfrac{1}{\ln t}$. Notons Φ une primitive de f.

Alors $F(x) = \Phi\left(x^2\right) - \Phi(x)$, avec $\Phi' = f$.

Donc $F'(x) = 2x\Phi'\left(x^2\right) - \Phi'(x)$. Donc

$$F'(x) = 2x \times \frac{1}{\ln\left(x^2\right)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{2x}{2\ln x} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$$

d) (Bonus) Déterminer la limite de $F'(x)$ quand x tend vers 1.

On sait que $\lim\limits_{x\to 1} = \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$ (c'est la limite d'un taux de variation)

D'où, par limite d'inverse, $\lim\limits_{x\to 1} = \dfrac{x-1}{\ln x} = 1$.

On en conclut que la limite de $F'(x)$ quand x tend vers 1 est 1.

5.9 Exercice n° 9

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier n positif,

$$u_{n+1} + u_n = n \qquad (*)$$

Déterminer l'expression générale de u_n en fonction de n.

- De la relation de récurrence $(*)$, on peut dire que

$$u_{n+2} + u_{n+1} = n + 1$$

  Toujours d'après $(*)$, on a $u_{n+1} = n - u_n$, et en replaçant dans l'égalité précédente, on a

$$u_{n+2} + (n - u_n) = n + 1$$

  i.e.

$$u_{n+2} - u_n = 1 \qquad (**)$$

- On va chercher à conjecturer l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

  — On a $u_0 = 0$.
  — En prenant $n = 0$ dans $(*)$, on a $u_1 + 0 = 0$, i.e. $u_1 = 0$.
  — En prenant $n = 0$ dans $(**)$, on a $u_2 - u_0 = u_2 - 0 = 1$, i.e. $u_2 = 1$.
  — En prenant $n = 1$ dans $(**)$, on a $u_3 - u_1 = u_3 - 0 = 1$, i.e. $u_3 = 1$.
  — En prenant $n = 2$ dans $(**)$, on a $u_4 - u_2 = u_4 - 1 = 1$, i.e. $u_4 = 2$.
  — En prenant $n = 3$ dans $(**)$, on a $u_5 - u_3 = u_5 - 1 = 1$, i.e. $u_5 = 2$.

  On conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\[2ex] \dfrac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

- Montrons que cette égalité est vraie par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

  — Initialisation : l'initialisation a été faite au moment de la conjecture, au point précédent.
  — On suppose que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\[2ex] \dfrac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

  Or, $u_{n+1} = n - u_n$, donc on a deux cas :

- Si n est pair, alors $n+1$ est impair, et notre but est de montrer que

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)-1}{2} = \frac{n}{2}$$

Pour n est pair, par hypothèse de récurrence, on a

$$u_{n+1} \overset{\text{(HR)}}{=} n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} = \frac{(n+1)-1}{2}$$

Si n est pair, $n+1$ est impair, et donc

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)-1}{2}$$

ce que l'on voulait.

- Si n est impair, alors $n+1$ est pair, et notre but est de montrer que

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{2}$$

Pour n impair, par hypothèse de récurrence, on a

$$u_{n+1} \overset{\text{(HR)}}{=} n - \frac{n-1}{2} = \frac{2n-(n-1)}{2} = \frac{2n-n+1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Si n est impair, $n+1$ est pair, et $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2}$, ce que l'on voulait démontrer.

5.10 Exercice n° 10 : formule de Viète

Soit un entier $n > 1$. On pose $u_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$ (n radicaux).

Montrer que $u_n = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ et que, si on pose $v_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} u_k$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{v_n}{2^n}\right) = \frac{2}{\pi}$$

- On va montrer que $u_n = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.

  — Initialisation : on a $2\cos\left(\dfrac{\pi}{2^3}\right) = 2\cos\dfrac{\pi}{8}$. Or, on sait que

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) \ - \ 1 \tag{*}$$

En appliquant cette formule à $x = \frac{\pi}{8}$, on obtient

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$$

i.e.

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1$$

i.e., puisque $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

i.e.

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

i.e.

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

On en conclut que

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

D'où $u_n = \sqrt{2+\sqrt{2}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, donc la propriété est initialisée pour $n = 2$.

— Hérédité : supposons que, pour un certain $n > 2$, on a

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}, \text{ avec } n \text{ radicaux.}$$

Alors, de la relation (*) avec $x = \frac{\pi}{n+2}$, on peut affirmer que

$$\cos\left(2\times\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) - 1, \quad \text{i.e.} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) - 1$$

$$\text{i.e.} \quad 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

Il vient, par hypothèse de récurrence,

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}{2} \quad \text{avec } n \text{ radicaux.}$$

i.e.

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}{2} \quad \text{avec } n \text{ radicaux.}$$

i.e.

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}{4} \quad \text{avec } n \text{ radicaux.}$$

i.e.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}}{2} \quad \text{avec } n+1 \text{ radicaux.}$$

i.e.

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}} \quad \text{avec } n+1 \text{ radicaux.}$$

d'où l'hérédité.

— La propriété est initialisée $n = 2$ et est héréditaire. Ainsi,

$$\forall n > 2, 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}} \quad \text{avec } n \text{ radicaux.}$$

- On pose $v_n = \prod_{k=1}^{n} 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right) = 2^n \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)$.

  D'après le dernier exercice de la séance 4, on a, pour $P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$,

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Pour $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient la suite $v_n = 2^n \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)$, et, par la limite précédente, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} P_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarque historique : Cette formule a été démontrée par Viète[1] dans une publication de 1593, dans laquelle il cherchait à trouver une approximation du nombre π. Mais la preuve de Viète était géométrique ! La démonstration que nous venons de faire est due à la formule d'Euler[2] (cf dernier exercice de la séance 4), qui nous permet d'aboutir plus rapidement au résultat de Viète.

1. François Viète (1540-1603)
2. Leonard Euler (1707-1783)

5.11 Exercice n° 11

Résoudre l'équation $x^4-21x+8=0$ sachant que deux de ses solutions sont inverses l'une de l'autre.

Notons r et $\frac{1}{r}$ deux des racines de $x^4-21x+8$, et notons a et b les deux autres.

Ainsi $x^4-21x+8=(x-r)\left(x-\frac{1}{r}\right)(x-a)(x-b)$

Or, $(x-r)\left(x-\frac{1}{r}\right)(x-a)(x-b)=\left(x-\left(r+\frac{1}{r}\right)x+1\right)\left(x^2-(a+b)x+ab\right)$.

La factorisation de $x^4-21x+8$ attendue est donc de la forme

$$\left(x^2-\alpha x+1\right)\left(x^2-\beta x+\gamma\right)$$

On développe :

$$\begin{aligned}\left(x^2-\alpha x+1\right)\left(x^2-\beta x+\gamma\right) &= x^4-\beta x^3+\gamma x^2-\alpha x^3+\alpha\beta x^2-\alpha\gamma x+x^2-\beta x+\gamma\\ &= x^4+(-\alpha-\beta)x^3+(\gamma+\alpha\beta+1)x^2+(-\alpha\gamma-\beta)x+\gamma\end{aligned}$$

On identifie les coefficients, et on obtient le système et les équivalences :

$$\begin{cases}-\beta-\alpha=0\\ \gamma+\alpha\beta+1=0\\ -\alpha\gamma-\beta=-21\\ \gamma=8\end{cases} \iff \begin{cases}-\beta-\alpha=0\\ 8+\alpha\beta+1=0\\ -8\alpha-\beta=-21\end{cases} \iff \begin{cases}\beta=-\alpha\\ \alpha\beta=-9\\ 8\alpha+\beta=-21\end{cases} \iff \begin{cases}\beta=\alpha\\ -\alpha^2=-9\\ 8\alpha-\alpha=-21\end{cases}$$

Il vient que $\alpha=3$, et donc $\beta=-3$.

Par conséquent $x^4-21x+8=\left(x^2-3x+1\right)\left(x^2+3x+8\right)$.

- On étudie d'abord le trinôme x^2-3x+1.
  On a $\Delta=(-3)^2-4\times1\times1=9-4=5=\left(\sqrt{5}\right)^2$
  Donc les racines de ce trinôme sont
  $$x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$
- On étudie ensuite le trinôme x^2+3x+8.
  On a $\Delta=3^2-4\times1\times8=9-32=-23=\left(i\sqrt{23}\right)^2$
  Donc les racines de ce trinôme sont
  $$x_3=\frac{-3-i\sqrt{23}}{2} \text{ et } x_4=\frac{-3+i\sqrt{23}}{2}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation $x^4-21x+8=0$ est

$$\mathcal{S}=\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2};\frac{-3-i\sqrt{23}}{2};\frac{-3+i\sqrt{23}}{2}\right\}$$