

LYCÉE INTERNATIONAL - PRÉPA À LA PRÉPA – JUIN 2020

SÉANCE 1

1	Montrer que $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
2	Montrer qu'une fonction f (définie sur \mathbf{R}) est dérivable et paire si et seulement si f' est impaire. A-t-on aussi : une fonction f est dérivable et impaire si et seulement si f' est paire ?
3	Montrer que la courbe d'équation $y = \frac{e^x}{e^x + 1}$ admet un centre de symétrie, à déterminer.
4	Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x \right)$.
5	Pour tout entier $p > 1$, on définit l'entier $4\dots 48\dots 89$, composé de p chiffres 4, $p - 1$ chiffres 8 et d'un chiffre 9. Montrer que cet entier est toujours un carré parfait.
6	Pour tout réel $a \in]0; \pi[$, déterminer la forme algébrique de $\frac{1 + e^{ia}}{1 - e^{ia}}$.
7	La fonction tangente, définie sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, est bijective et sa fonction réciproque est notée « Arctan ». a) Que vaut $\cos(\text{Arctan}(x))$, pour tout x réel ? b) Montrer que, pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, $\int_0^{\tan x} \frac{1}{1+t^2} dt = x$. c) Par ailleurs, on montre que Arctan est dérivable et, pour tout x réel, $\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Déterminer, pour x réel non nul, $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$. d) Déterminer une primitive de la fonction Arctan.
8	Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Calculer $\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)} dx$.
9	On considère les deux suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$. Montrer l' Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\left(\sum_{k=0}^n (a_k b_k) \right)^2 \leq \sum_{k=0}^n (a_k)^2 \times \sum_{k=0}^n (b_k)^2$ et l' Inégalité de Minkowski : $\sqrt{\sum_{k=0}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=0}^n (a_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=0}^n (b_k)^2}$.
10	On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 = 2$, $u_1 = 7$ et, pour tout entier n positif, $u_{n+2} = 7u_{n+1} - 12u_n$. Étudier les suites $v = (u_{n+1} - 3u_n)$ et $w = (u_{n+1} - 4u_n)$ pour déterminer u_n en fonction de n .