LYCÉE INTERNATIONAL - PRÉPA À LA PRÉPA – JUIN 2020

SÉANCE 2

1	On considère l'équation $(E) : x^4+2x^3+3x^2+2x+1=0$. Déterminer une équation dont $z=x+\frac{1}{x}$ est solution et en déduire la résolution de (E).
2	Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{E(x)}{x}$, où $E(x)$ est la partie entière de x.
3	Pour tout réel x, on pose $f(x)=\frac{x}{1+\lvert x\rvert}$. Déterminer son ensemble-image, montrer que f est bijective et expliciter sa fonction réciproque.
4	**Inégalité des Accroissements Finis** : Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction dérivable sur $[a ; b]$. On suppose que f est bornée entre m et M. Montrer qu'alors, $m\leq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq M$.
5	Le plus petit multiple commun (positif) de deux entiers a et b, noté **PPCM**(a ; b), vérifie : PGCD(a ; b) × PPCM(a ; b) = $a \times b$. Résoudre alors le système $\begin{cases} PGCD(a\ ;\ b)=a-b \\ PPCM(a\ ;\ b)=72 \end{cases}$.
6	Soit $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Résoudre l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3=\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$.
7	Pour tout couple (a ; b) de réels, on note Max(a ; b) le plus grand des deux nombres a et b. Étudier la fonction définie sur **R** par $f(x)=\int_0^1 Max(x\,;t)\,dt$.
8	On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0=1$ et, pour tout entier n positif, $u_{n+1}=\frac{u_n+6}{u_n+2}$. Étudier la suite $v=\left(\frac{u_n-2}{u_n+3}\right)$ pour déterminer l'expression générale de u_n en fonction de n.
9	Soit un entier $n > 1$. Exprimer autrement $A_n=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ pour en déterminer la limite quand n tend vers l'infini.
10	Montrer que l'équation $3\sin x+4\cos x=2$ peut s'écrire sous la forme $a\sin(x+b)=c$ et résoudre alors l'équation.