LYCÉE INTERNATIONAL - PRÉPA À LA PRÉPA – JUIN 2020

SÉANCE 3

1	On note a, b et c les trois solutions de l'équation $x^3+2x-1=0$. Calculer $a^3+b^3+c^3$.
2	Soit f une fonction dérivable sur **R** vérifiant $f\left(f(x)\right)=\dfrac{x}{2}+3$. Exprimer $f\left(\dfrac{x}{2}+3\right)$ en fonction de $f(x)$ et en déduire que f est une fonction affine.
3	Montrer que tout fonction est la somme, d'une unique façon d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
4	Si a est un réel strictement positif et b un réel quelconque, on définit $a^b=e^{b\ln a}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1{,}0001)^x}{x^{2020}}$.
5	Montrer que la somme de cinq carrés parfaits d'entiers consécutifs n'est jamais un carré parfait.
6	Soit un entier $n > 0$. Déterminer, dans **C**, les racines n-ièmes de 1, puis leur produit. Résoudre l'équation $(z-i)^n=(z+i)^n$
7	Déterminer les nombres complexes z non nuls tels que $z'=z+\dfrac{1}{z}$ soit un réel. Même question en remplaçant « réel » par « imaginaire pur ».
8	Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f et g deux fonctions continues sur $[a\,;b]$. Montrer alors l'**Inégalité de Cauchy-Schwarz** sur les intégrales : $$\left(\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right).$$
9	Pour tout entier $n > 0$, on sait que $S_1=\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$ et que $S_2=\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Exprimer $S_4=\sum\limits_{h=0}^{n-1}(h+1)^4$ de deux façons pour déterminer $S_3=\sum\limits_{k=1}^{n}k^3$.
10	Montrer que pour tout réel x et tout entier naturel n, $\lvert\sin(nx)\rvert\leq n\lvert\sin x\rvert$.