LYCÉE INTERNATIONAL - PRÉPA À LA PRÉPA – JUIN 2020

SÉANCE 4

1	Soit *a, b, c* et *d* quatre nombres rationnels tels que $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$. Montrer que *a* = *c* et que *b* = *d*.
2	Déterminer une équation du troisième degré dont $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ est solution pour en déduire la valeur numérique.
3	Soit un réel $c > 0$. Pour tout réel *x*, on pose $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+cx^2}}$. On note f^n la composée de *n* fois la fonction *f*. Exprimer $f^n(x)$ en fonction de *n* et *x*.
4	Pour tout réel $a > 0$ et différent de 1, on appelle « **logarithme de base *a*** » la fonction, notée $\log_a$, définie par : Pour tout $x > 0$, $\log_a(x)=\dfrac{\ln x}{\ln a}$. Pour $a = 10$, on note log le logarithme en base 10, appelé **logarithme décimal**. On rappelle aussi que si *a* est un réel strictement positif et *b* un réel quelconque, on définit $a^b=e^{b\ln a}$. Montrer que, pour a, b et c tels que cette égalité a un sens, $a^{\log_b(c)}=c^{\log_b(a)}$. En déduire la résolution de l'équation : $5^{\log x}=50-x^{\log 5}$
5	Montrer que $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ est un nombre irrationnel.
6	Pour *n* entier positif, on définit les nombres de Fermat, de la forme $F_n=2^{\left(2^n\right)}+1$. Montrer qu'ils sont tous deux à deux premiers entre eux.
7	Déterminer les racines carrées dans **C** de $-16+30i$.
8	Pour tout *x* réel, on pose $f(x)=e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$. Montrer que *f* est une fonction impaire et que $f'(x)+2x\,f(x)=1$.
9	Montrer l'**Identité de Catalan** : Pour tout entier $n > 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$.
10	Soit *x* un réel de l'intervalle $]0\,;\pi[$ et soit un entier $n > 1$. Exprimer autrement $P_n(x)=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$ pour en déterminer, en fonction de *x*, la limite quand *n* tend vers l'infini. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)\right)$.