LYCÉE INTERNATIONAL - PRÉPA À LA PRÉPA – JUIN 2020

SÉANCE 5

1	Résoudre l'équation : $4^x + 10^x = 25^x$.
2	Pour tout x différent de 1, on pose $f(x) = \dfrac{x^3+x^2+x+5}{(x-1)^2(x^2+1)}$. a) Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que $f(x)$ peut aussi s'écrire $\dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{(x-1)^2} + \dfrac{cx}{x^2+1}$. b) En déduire la primitive de f qui s'annule en 0.
3	Soit f la fonction définie sur **R** par : Pour tout x non nul, $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $f(0) = 0$. a) Montrer que f est continue sur **R**. Montrer que f est dérivable sur **R*** et calculer $f'(x)$ pour x non nul. b) Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$. c) Que peut-on dire de $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$?
4	Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f. Exprimer $f^{(n)}(x)$ en fonction de n et x.
5	**Formule de Legendre** : Déterminer le nombre de zéros qui terminent 1000 !
6	Soit a et b deux nombres complexes tels que $\lvert a\rvert < 1$ et $\lvert b\rvert < 1$. Montrer que $\left\lvert \dfrac{a-b}{1-\overline{a}\,b} \right\rvert < 1$
7	Soit A, B et C trois points distincts du cercle trigonométrique, d'affixes respectives a, b et c. Montrer que le point M d'affixe z appartient à la hauteur issue de C du triangle ABC si et seulement si $\overline{z} = \dfrac{z}{ab} + \dfrac{1}{c} - \dfrac{c}{ab}$.
8	a) Déterminer pour quelles valeurs de x, $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt$ existe. b) Calculer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers 1.
9	On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier n positif, $u_{n+1} + u_n = n$. Déterminer l'expression générale de u_n en fonction de n.
10	Soit un entier $n > 1$. On pose $u_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}$ (*n radicaux*). Montrer que $u_n = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ et que, si on pose $v_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} u_k$, alors $\lim\left(\dfrac{v_n}{2^n}\right) = \dfrac{2}{\pi}$.
11	Résoudre l'équation $x^4 - 21x + 8 = 0$ sachant que deux de ses solutions sont inverses l'une de l'autre.