CALCUL EN ÉCRITURE FRACTIONNAIRE

I) Écriture fractionnaire

a) Définitions

- Le quotient de deux nombres décimaux est une écriture fractionnaire, comme $\frac{2,3}{7,28}$.
- Une fraction est une écriture fractionnaire quotient de deux entiers, comme $\frac{2}{3}$.
- La barre de fraction doit être placée à la même hauteur que le signe « égal ».
Si l'écriture représente un nombre négatif, le signe « moins » doit être placée, au moins en fin de calcul, devant cette barre de fraction.
Ainsi $\frac{-3,2}{4}$ sera écrit $-\frac{3,2}{4}$.

b) Règle fondamentale

Soit a , b et k trois nombres décimaux relatifs,

b et k étant non nuls ; alors on a $\frac{k \times a}{k \times b} = \frac{a}{b}$

« On ne change pas la valeur d'une écriture fractionnaire si on multiplie son numérateur (a) et son dénominateur (b) par un même nombre (k) »

c) Utilisations de la règle fondamentale

- On peut transformer une écriture fractionnaire en une autre de même valeur en multipliant le numérateur et le dénominateur par le même nombre (non nul) bien choisi.

Exemple : Si on veut la fraction égale à $\frac{6}{7}$ ayant pour dénominateur 28, on remarque que $7 \times 4 = 28$, donc que $\frac{6}{7} = \frac{6 \times 4}{7 \times 4} = \frac{24}{28}$.

- On peut transformer toute fraction en une autre de même valeur et ayant ses nouveaux numérateur et dénominateur sans diviseurs communs autres que 1 et -1 , que l'on dit premiers entre eux et que la fraction ainsi obtenue est dite irréductible (on ne peut plus la réduire, la simplifier).

Exemple : Pour la fraction $\frac{12}{18}$, on peut écrire :

$\frac{12}{18} = \frac{6 \times 2}{6 \times 3} = \frac{2}{3}$. Les nombres 2 et 3 sont premiers entre eux donc la fraction ainsi obtenue est irréductible.

- On peut transformer toute écriture fractionnaire a/b en fraction en multipliant a et b par 10 autant de fois qu'il est nécessaire pour avoir des entiers.

Exemple : $\frac{2,3}{7,28} = \frac{2,3 \times 10 \times 10}{7,28 \times 10 \times 10} = \frac{230}{728}$.

II) Opérations

Les dénominateurs ne sont jamais nuls

1) Addition et soustraction

a) Addition avec dénominateurs égaux

- Il suffit d'ajouter les numérateurs :

$$\frac{a}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{d}$$

$$\frac{a}{d} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{d}$$

b) Addition dans le cas général

- On se ramène au cas précédent en appliquant la règle fondamentale : On appelle cela :

« réduire au même dénominateur »

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} + \frac{c \times b}{d \times b} = \frac{a \times d + b \times c}{b \times d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

- La soustraction s'effectue de la même façon, puisque soustraire, c'est ajouter son opposé.

Exemple : $\frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{2}{3} + \frac{-4}{5}$.

c) Réduction au même dénominateur

- Pour simplifier $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$, on peut donc utiliser le dénominateur commun $b \times d$, qui est bien un multiple commun de b et de d , et ainsi écrire $\frac{a \times d + b \times c}{b \times d}$.
Cependant, on peut utiliser un dénominateur plus petit.

Exemple : 8 et 12 ont 96 ($= 8 \times 12$) pour multiple commun, mais aussi $24 = 8 \times 3 = 12 \times 2$.

2) Multiplication et division

a) Règle de base pour la multiplication

- Il suffit de multiplier les numérateurs entre eux, et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \quad (*)$$

- Cas particulier : $a \times \frac{c}{d} = \frac{a}{1} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{1 \times d} = \frac{a \times c}{d}$

b) Inverse d'une fraction

- De la formule (*), on déduit : $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{b \times a} = 1$.
- $\frac{b}{a}$ est l'inverse de $\frac{a}{b}$.

c) Division de deux fractions

- « Diviser deux nombres, c'est multiplier le premier par l'inverse du second » ; donc :

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$