EXERCICES DE CALCUL INTÉGRAL

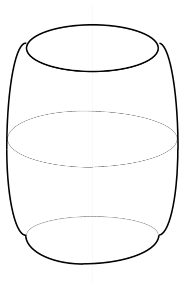
I) Soit m et n deux entiers positifs.

Montrer que $\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \dfrac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$

II) Déterminer un entier positif n tel que :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}>1000$$

III) Un tonneau a la forme indiquée sur le dessin ci-contre :



C'est un solide de révolution autour de l'axe en pointillé. Son manteau a une forme parabolique. Le diamètre des bases est 60 cm et le diamètre du grand cercle central est de 90 cm.
La hauteur du tonneau est de 1,20 m.

Déterminer son volume en litre.

IV) Calculs d'intégrales (indication facultative à la fin)

1) Déterminer la valeur de $A=\int_0^1 \dfrac{3t^3+4t^2+3t+2}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$.

2) Déterminer la valeur du réel $B=\int_1^2 \dfrac{dt}{e^t-e^{-t}}$.

3) Calculer, pour tout réel $k>1$, $I_k=\int_1^k \dfrac{dt}{t(t^7+1)}$,

puis la limite de I_k lorsque k tend vers $+\infty$.

4) Calculer $C=\int_{-1}^0 \dfrac{x^2-1}{2x-1}\,dx$, puis

$D=\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \dfrac{cos^3 x}{1-2\,sin\,x}\,dx$, puis $E=\int_{-1}^0 t\ \ ln(1-2t)\,dt$

5) Calculer $F=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{cos\,x}{cos\,x+sin\,x}\,dx$

6) Calculer $G=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (tan\,x)^3\,dx$.

7) Calculer $H=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^4 dx$, $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^4 dx$

et $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2(\sin x)^2 dx$.

8) Calculer $K=\int_0^{\pi} e^x(cos\,x)^2\,dx$ et

$L=\int_0^{\pi} e^x(sin\,x)^2\,dx$.

9) Déterminer la valeur de $M=\int_{\frac{1}{2}}^1 \dfrac{dx}{x(x^2+1)}$,

puis de $N=\int_{\frac{1}{2}}^1 \dfrac{x\,ln\,x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

10) Calculer $P=\int_1^2 \cos(\ln x)\,dx$

11) Calculer $Q=\int_1^2 e^{\sqrt{x}}\,dx$

12) Calculer $R=\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{3x}\,cos\,3x\,dx$

et $S=\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{3x}\,sin\,3x\,dx$.

13) Calculer $T=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} sin^4 x\,cos^3 x\,dx$.

V) Utiliser le fait que $I=\int_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2}=\dfrac{\pi}{4}$ pour calculer :

$$J=\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt \text{ , puis } K=\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}.$$

VI) Déterminer la valeur du réel

$$A=\int_1^e \left(27x^2-(20e)x-5\right)(ln\,x)^2\,dx.$$

(On doit trouver un entier.)

VII) Déterminer, après en avoir justifié l'existence, la valeur des intégrales suivantes :

- $A=\int_{\frac{1}{2}}^1 \dfrac{t\,ln\,t}{(1+t^2)^2}\,dt$
- $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(1+\cos x)\,dx$
- $C=\int_1^e x^3(\ln x)^2\,dx$
- $D=\int_0^{\frac{1}{2}} (3x^2-6x+1)\,ln(1-x)\,dx$

VIII) Pour tout entier $n \geq 0$, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x \, dx \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x \, dx .$$

Les deux parties de ce problème doivent être résolues de façon indépendante, donc aucun résultat de l'une ne doit être utilisé dans l'autre partie.

Partie A :

1) Calculer I_0 et J_0.

2) L'entier *n* est maintenant non nul.

En intégrant par parties I_n et J_n, montrer que I_n et J_n vérifient le système :

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}} \end{cases}$$

En déduire, pour tout *n* entier naturel non nul, les expressions de I_n et J_n en fonction de *n*.

c) Déterminer les limites de I_n et de J_n lorsque *n* tend vers $+\infty$.

Partie B :

On pose $f(x) = e^{-nx} \sin x$.

a) Montrer qu'il existe deux constantes *a* et *b*, que l'on déterminera, telles que la fonction *F* définie par :

$$F(x) = e^{-nx}(a \sin x + b \cos x)$$

est une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$.

b) Retrouver ainsi la valeur de I_n.

IX) Soit un entier *n* > 1 et un réel *x* de]0 ; 1[. On note :

$$u_n(x) = \int_x^1 (\ln t)^n \, dt .$$

a) Justifier l'existence de $u_n(x)$ et déterminer son signe.

b) Démontrer la formule suivante :

$$u_{n+1}(x) = -x(\ln x)^{n+1} - (n+1)u_n(x) .$$

c) Démontrer par récurrence sur *n* que, pour tout entier $n > 1$, $u_n(x)$ admet une limite finie lorsque *x* tend vers 0.

d) On pose alors $v_n = \lim\limits_{x \to 0} u_n(x)$.

Déterminer v_n en fonction de *n*.

X) On pose, pour tout *n* entier positif,

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-t} \cos t \, dt .$$

1) Montrer que la suite *u* ainsi définie est une suite géométrique.

2) Donner alors un sens à l'expression

$$U = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos t \, dt \text{ et sa valeur.}$$

Indications concernant l'exercice IV

1) Soit *a*, *b* et *c* trois réels. Déterminer la dérivée de la fonction *f* définie par : $f(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{1+x^2}$.

2) Vérifier que, pour *x* > 1, $\dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{x}{x+1}$.

3) Montrer qu'il existe deux réels *a* et *b*, à déterminer, tels que, pour tout réel *t* positif, $\dfrac{1}{t(t^7+1)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{bt^6}{t^7+1}$.

4) Déterminer les réels *a*, *b* et *c* tels que, pour tout réel *u* différent de $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{u^2-1}{2u-1} = au + b + \dfrac{c}{2u-1}$

5) Poser $F' = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$ et calculer *F* +*F'*, puis *F* – *F'*, puis *F* (et accessoirement *F'*).

6) Poser et calculer $G' = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx$, puis calculer *G* + *G'*, puis enfin *G*.

7) Calculer successivement, grâce à des formules de trigonométrie, les valeurs de *H* – *I*, *H* + *I* + 2*J* et *H* + *I* – 6*J*.
En déduire les valeurs de *H*, *I* et *J*. (On pourra utiliser l'égalité : $u^2 + v^2 - 6uv = (u-v)^2 - 4uv$)

8) Calculer $K' = \int_0^{\pi} e^x \cos 2x \, dx$, puis calculer *K* + *L* et *K* – *L*, et en déduire *K* et *L*.

9) Montrer l'existence et déterminer trois réels *a*, *b* et *c* tels que : pour tout *x* non nul, $\dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$.

10) Faire une IPP avec $\cos(\ln x) = 1 \times \cos(\ln x)$.

11) Faire une IPP avec. $e^{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \times \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

12) Remarquer que $R + iS = \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{3x}(\cos 3x + i \sin 3x) \, dx$.

13) On pourra utiliser les formules d'Euler, ou remarquer que : $\sin^4 x \cos^3 x = (\sin^4 x(1 - \sin^2 x))\cos x$