CONIQUES (*Exercices*)

I) PARABOLE

- 1) Construire les éléments caractéristiques (foyer F et directrice (D)) d'une parabole (P) connaissant :

<ol style="list-style-type: none"> a) F et deux points de (P) c) F, un point et sa tangente e) F et le sommet g) (D) et le sommet i) (D), l'axe et un point k) (D), un point et sa tangente m) trois tangentes dont celle au sommet 	<ol style="list-style-type: none"> b) F et deux tangentes à (P) d) F, un point et une tangente f) F, l'axe et un point h) F, un point et un point de (D) j) (D) et deux points l) (D) et deux tangentes
---	---
- 2) Construire les tangentes passant par un point A à une parabole (P) connaissant A , F et (D) .
- 3) Construire la tangente à une parabole, parallèle à une droite (d) donnée, connaissant le foyer et la directrice.
- 4) Soit (D) une droite. Soit M un point hors de (D) . Déterminer le lieu des foyers F , puis des sommets S , des paraboles passant par M et de directrice (D) .
- 5) Soit (P) la parabole d'équation $y = \frac{x^2}{2a}$. Soit M et M' deux points de (P) d'abscisses respectives u et u' .
 - a) Déterminer une relation entre u et u' pour que les tangentes respectives à (P) en M et M' soient perpendiculaires.
 - b) Déterminer le lieu des points d'intersection de ces deux droites. Montrer qu'alors (MM') passe par un point fixe.
- 6) Soit un point A , une droite (D) , un réel $k > 0$. Déterminer le lieu des points dont la différence des carrés des distances à A et à (D) est une constante k .
- 7) Soit (P) une parabole et soit (D) son axe focal. Soit (d) une droite quelconque, parallèle à (D) .
 - a) Montrer que (d) coupe (P) en un unique point M .
 - b) Soit (T) la tangente à (P) en M . Soit (T') une droite quelconque, parallèle à (T) , coupant (P) en deux points distincts A et B .
 - c) Montrer que le milieu I de $[AB]$ est sur (d) .
 - d) Montrer que les tangentes respectives à (P) en A et B se coupent sur (d) .
- 8) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on note (D) la droite d'équation $y = \alpha$ (α strictement positif) et (D') la droite d'équation $y = ax$ (a réel non nul).
 - a) Déterminer les équations cartésiennes de la symétrie d'axe (D) et de direction celle de (D') .
 - b) Soit (P) la parabole d'équation $y^2 = 2px$ ($p > 0$). Soit α un réel non nul. Montrer que la droite (D) d'équation $y = \alpha$ coupe (P) en un unique point M , que l'on déterminera.
 - c) Déterminer une équation de la tangente (T) à (P) en M .
 - d) Montrer que (P) est globalement invariante par la symétrie s d'axe (D) et de direction celle de (T) .

II) ELLIPSE

- 1) Construire les éléments caractéristiques (foyers F et F' , directrices (D) et (D') , ...) d'une ellipse (E) connaissant :
 - a) les deux foyers et un point M de (E) hors du segment $[FF']$
 - b) trois sommets
 - c) les deux foyers et la valeur de a
 - d) les deux foyers et une tangente
 - e) les deux foyers et la valeur de b
- 2) On considère la courbe (C) d'équation

$$x^2 + xy + y^2 = 1.$$
 - a) Déterminer une équation de cette courbe dans le repère obtenu en faisant subir à $\mathfrak{R}$, repère de départ, une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
 - b) Étudier alors la courbe.
- 3) Soit (E) la courbe d'équation $y^2 = 2x - \frac{x^2}{m}$, où m est un réel de $]0; 1[$. Déterminer le lieu des sommets, centre et foyers lorsque m varie.
- 4) On considère les deux points $A(3; 0)$ et $B(2; 2)$. Déterminer, lorsque t varie, l'ensemble des points M , barycentre de O , A et B affectés des coefficients respectifs $1 - \cos t - \sin t$, $2 + \cos t - 2 \sin t$ et $3 \sin t$.
- 5) Soit (E) l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Soit $A(2; 0)$ et $B(0; 3)$. Déterminer l'ensemble des centres de gravité du triangle (ABM) lorsque le point M décrit (E) .
- 6) Montrer que, pour tout point M d'une ellipse (E) de centre O , il existe deux points P et Q de (E) tels que le centre de gravité de (MPQ) est O .
- 7) Soit un point A , une droite (D) , un réel k strictement positif. Déterminer le lieu des points dont la somme des carrés des distances à A et à (D) est constante égale à k .
- 8) Montrer que le lieu des milieux des segments de longueur 4 ayant une extrémité sur la droite d'équation $y = x$ et l'autre sur la droite d'équation $y = 2x$ est une ellipse d'équation :

$$13y^2 - 36xy + 25x^2 = 4.$$
 Préciser ses éléments caractéristiques.

III) HYPERBOLE

- 1) Construire les éléments caractéristiques (foyers F et F' , directrices (D) et (D') , excentricité, ...) d'une hyperbole (H) connaissant :
 - a) les deux foyers et un point M de (H) qui est hors de (FF') – $[FF']$
 - b) un foyer et deux sommets
 - c) les deux foyers et la valeur de a
 - d) les deux foyers et une tangente
- 2) Soit A, B et C trois points quelconques distincts d'une hyperbole équilatère (H) .
 - a) Montrer que ces trois points ne peuvent être alignés.
 - b) Montrer que la tangente en A à (H) est perpendiculaire à la droite (BC) .
 - c) En déduire que l'orthocentre du triangle (ABC) est sur l'hyperbole.
- 3) Soit (H) une hyperbole équilatère de centre O . Soit M un point de (H) et M' son symétrique par rapport à O . Le cercle de centre M passant par M' recoupe (H) en A, B et C . Montrer que (ABC) est un triangle équilatéral.
- 4) Soit (H) une hyperbole de foyer F et de directrice correspondante (D) . Soit P et Q les projetés orthogonaux de F sur les asymptotes.
 - a) Montrer que P et Q sont sur (D) .
 - b) Montrer que le sommet S , se trouvant entre F et (D) , est équidistant des droites (FP) , (FQ) et (PQ) .

IV) DÉTERMINATION DE CONIQUES

- 1) Définition : on appelle courbe du second degré une courbe dont on peut écrire une équation sous la forme : $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, avec a, b, c, d, e et f six réels.

On va montrer que cette famille de courbes contient les coniques.

Étape 1 : Élimination du terme en « xy »

Si on a déjà $b = 0$, passer à l'étape 2.

Sinon, le repère initial étant $\mathfrak{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$, considérons le

repère $\mathfrak{R}' = (O; \vec{u}, \vec{v})$, obtenu à partir de $\mathfrak{R}$ par la rotation r de centre O et d'angle θ .

Montrer que l'équation de la courbe dans le repère $\mathfrak{R}'$ ne contient pas de terme en « xy » si et seulement si

$$\cot(2\theta) = \frac{c-a}{b}.$$

Étape 2 : Élimination des termes en « x » et/ou en « y »

Notons $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ l'équation dans $\mathfrak{R}'$.

- Si $D = 0$ et $E = 0$, passer à l'étape 3.
- Si $A = 0$ et $C = 0$, passer à l'étape 3.
- Si $A = 0$ et $C \neq 0$, montrer que, dans un repère $\mathfrak{R}''$ à préciser, l'équation peut s'écrire $y^2 = 2px$.
- Si $C = 0$ et $A \neq 0$, montrer que, dans un repère $\mathfrak{R}''$ à préciser, l'équation peut s'écrire $x^2 = 2py$.
- Si A et C sont non nuls, montrer que, dans un repère $\mathfrak{R}''$ à préciser, l'équation peut s'écrire $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$.

Étape 3 : Récapitulation

Préciser la nature de la courbe selon les cas étudiés à l'étape 2.

Faire un tableau où seront indiqués dans quel(s) cas on obtient : l'ensemble vide, un point, une droite, « deux » droites confondues, deux droites strictement parallèles, deux droites sécantes, une parabole, une ellipse, une hyperbole, le plan tout entier.

Étape 4 : Conclusion

Préciser, parmi les types de courbes obtenus à l'étape 3, celles que l'on peut effectivement définir comme intersection d'un cône de révolution avec un plan.

- 2) Déterminer les éléments caractéristiques des coniques qui composent les courbes dont voici des équations cartésiennes :

a) $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y - 3 = 0$

b) $9x^2 - 4y^2 - 18x + 16y - 43 = 0$

c) $\frac{y^4}{16} = x^4 - 2x^2 + 1$

d) $9y^2 = |-4x^2 + 16x + 20|$

e) $16x|x| + 36y|y| = 576$

f) $|16x^2 + 96x - 256| = 25y^2$

g) $y = -5 + \frac{2}{3}\sqrt{8 + 2x - x^2}$

h) $y = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$

i) $(|x| - 1)(|y| - 1) = 1$

V) DIVERS

- 1) Soit (C) une conique de foyer F et de directrice correspondante (D) . M étant un point quelconque de (C) , la droite (FM) coupe (D) en M' .

Montrer que $\frac{1}{FM} - \frac{1}{FM'}$ est constante.

- 2) a) Étudier, selon les valeurs des réels u, v et w , le nombre de points d'intersection de la droite d'équation $ux + vy + w = 0$ avec chacune des coniques suivantes :

- la parabole d'équation $y^2 = 2px$

- l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

- b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur u, v et w pour que la droite soit tangente à la conique. [L'équation liant u, v et w s'appelle alors l'équation tangentielle de la courbe.]