

COORDONNÉES & ÉQUATIONS

I) Coordonnées et équations cartésiennes

Abscisse et ordonnée

1) Coordonnées cartésiennes

Étant données une droite (D) et une direction (d) [ou encore une droite (d) dont on ne s'intéresse qu'à la direction, différente de celle de (D)], on appelle projection sur (D) parallèlement à (d) [ou de direction (d)] l'application qui, à tout point M du plan, associe le point M' , intersection de (D) avec la droite passant par M de direction (d). Soit O un point du plan, et \vec{i} et \vec{j} deux vecteurs non colinéaires. On note \mathcal{R} le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit un point M du plan. m étant le projeté de M sur $(O; \vec{i})$ parallèlement à $(O; \vec{j})$ et m' celui sur $(O; \vec{j})$ parallèlement à $(O; \vec{i})$, on a alors $\vec{OM} = \vec{Om} + \vec{Om'} = x\vec{i} + y\vec{j}$. x et y s'appellent respectivement l'abscisse et l'ordonnée de M dans le repère. Ce sont les coordonnées cartésiennes de M . Si, de plus, les vecteurs \vec{i} et \vec{j} sont orthogonaux et normés (i.e. de norme 1), le repère est dit orthonormé ou orthonormal; c'est dans ce cas que l'on se placera.

2) Équation cartésienne explicite

a) **Définition** : Une équation cartésienne explicite est la donnée de l'ordonnée y d'un point de la courbe en fonction de son abscisse x (ou le contraire). On écrit la relation sous la forme $y = f(x)$, où f est une fonction numérique de la variable réelle (c'est-à-dire d'une partie de \mathbf{R} vers \mathbf{R}).

b) Quelques exemples :

(avec certaines conditions sur les constantes)

	Équation	Courbe
1	$y = \frac{K}{x^2 + a^2}$	Agnésienne
2	$y = \frac{Kx}{x^2 + a^2}$	Anguinéa
3	$y = \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	Chaînette
4	$y = e^{-x^2}$	Courbe de Gauss
5	$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	Cubique
6	$y = mx + p$	Droite
7	$y = K e^{ax}$	Exponentielle
8	$y = \frac{ax + b}{cx + d}$	Hyperbole
9	$y = ax^2 + bx + c$	Parabole
10	$y = e^{-kx} \sin(ax)$	Sinusoïde amortie

11	$y = \ln\left(\frac{\sqrt{1-x^2} + 1}{x}\right) - \sqrt{1-x^2}$	Tractrice
12	$y = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x}$	Trident de Newton

3) Équations cartésiennes implicites

a) **Définition** : Une équation cartésienne implicite est une relation entre l'abscisse x et l'ordonnée y d'un point de (C), mais pas sous la forme « y fonction de x » ou réciproquement. On écrit la relation sous la forme $f(x; y) = 0$, où f est ici une fonction à deux variables, d'une partie de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ vers \mathbf{R} .

b) Propriétés

Une courbe définie par une équation cartésienne implicite est très souvent difficile à étudier sous cette forme.

Voici quelques exemples de transformations possibles :

- On pourra essayer d'exprimer l'équation sous forme explicite $y = f(x)$, ou encore sous la forme $x = f(y)$. Dans ce dernier cas, on pourra étudier la fonction f comme si l'équation apparaissait sous la forme $y = f(x)$, puis on fera subir à la courbe ainsi obtenue une réflexion d'axe la droite d'équation $y = x$ pour obtenir la courbe souhaitée. En effet, cette réflexion (ou encore appelée symétrie axiale orthogonale) a comme caractéristique de permuter l'abscisse et

l'ordonnée d'un point. Ses équations sont $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$.

Ainsi, les deux courbes d'équations respectives $y = f(x)$ et $x = f(y)$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$. Lorsque les vecteurs de base sont de même longueur, on appelle cette droite la « première bissectrice ».

- Il arrive aussi qu'avec certaines courbes « classiques », on puisse écrire l'équation cartésienne implicite sous la forme $y^2 = f(x)$, ou encore $x^2 = f(y)$. Dans le premier cas, on pourra considérer la courbe comme la réunion des deux courbes d'équations cartésiennes explicites respectives $y = \sqrt{f(x)}$ et $y = -\sqrt{f(x)}$, qui sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Dans le deuxième cas, on se ramène au premier cas, en étudiant la courbe d'équation $y^2 = f(x)$, puis on effectue la réflexion citée précédemment.

c) Quelques exemples :

	Équation	Courbe
13	$\frac{2}{x^3} + \frac{2}{y^3} = a^{\frac{2}{3}}$	Astroïde
14	$x^4(x^2 + y^2) = (x^2 - 1)^2$	Atriphtaloïde
15	$(x^2 + y)^2 = x^2 - y^2$	Besace
16	$y^2(1 - x^2) = (x^2 + 2y - 1)^2$	Bicorne

17	$y^2(x^2 + y^2) = ax^2$	Cappa
18	$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$	Cercle
19	$y(x^2 + y^2) = x^2$	Cissoïde de Dioclès
20	$x^2((x-a)^2 + y^2) = b^2$	Conchale
21	$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1$	Cruciforme
22	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Ellipse
23	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Hyperbole
24	$(x^2 + y^2 + 1)^2 = 4x^2 + 4a$	Ovale de Cassini
25	$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$	Parabole divergente
26	$x^4 - ax^3 + y^2 = 0$	Quartique piriforme
27	$x(x^2 + y^2) = x^2 - y^2$	Strophoïde droite
28	$x(x^2 + y^2) = 3x^2 - y^2$	Trisectrice de Mac-Laurin

4) Équations paramétriques (cartésiennes)

a) **Remarque** : Cette notion est issue de la cinématique du point ; et ici t est le temps.

Le point M a ses coordonnées x et y variant en fonction de t , donc sont considérées comme fonctions de t .

b) **Définition** : Un système d'équations paramétriques cartésiennes est un système donnant x et y comme

fonctions d'un paramètre t : $\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}, t \in I$,

t étant un élément de I , inclus dans \mathbf{R} , et u et v deux fonctions de I vers \mathbf{R} .

c) **Exemple** : $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$ forme un système

d'équations paramétriques (d'ellipse, voir courbe 22). Une équation cartésienne implicite de cette courbe est

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, et cette courbe peut être considérée

comme la réunion des deux courbes d'équations

explicites : $y = \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$ et $y = -\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$

d) **Propriétés** :

À partir d'une équation cartésienne explicite du type $y = f(x)$, on peut déterminer un système d'équations cartésiennes paramétriques, dont l'exemple le plus

simple est : $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}, t \in I$.

- Dans l'autre sens, c'est parfois plus difficile. Il faut et il suffit pour cela d'éliminer t entre x et y . Il est indispensable cependant de vérifier que l'on a bien raisonné par équivalence, c'est-à-dire qu'après cette élimination, on a bien la même courbe, et non pas seulement pour l'une une partie de l'autre, ou encore une autre courbe en plus.

e) **Applications** : Considérons le système d'équations

paramétriques : $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$.

- Après élimination de t entre les deux lignes, on a : $y = 5 - 2x$, qui est une équation cartésienne explicite d'une droite.

- Considérons le système : $\begin{cases} x = \cos \alpha + 2 \\ y = 1 - 2 \cos \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbf{R}$.

Après élimination de α , par l'intermédiaire de $\cos \alpha$ entre les deux lignes, on a aussi : $y = 5 - 2x$;

cependant, $\cos \alpha$ prenant ses valeurs dans $[-1 ; 1]$,

tous les points de cette droite ne sont pas atteints, mais seulement ceux du segment $[AB]$, avec $A(1 ; 3)$ et $B(3 ; -1)$.

- On a ici la paramétrisation du segment $[AB]$. On dit que la droite d'équation $y = 5 - 2x$ est un support de la courbe.

- Il arrive aussi que l'on puisse transformer une équation cartésienne implicite en un système d'équations cartésiennes paramétriques, en cherchant l'éventuelle intersection de la courbe avec la droite passant par O et de coefficient directeur t , c'est-à-dire la droite d'équation $y = tx$:

- Le système $\begin{cases} f(x; y) = 0 \\ y = tx \end{cases}, t \in \mathbf{R}$ permet parfois de se

ramener à $\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}, t \in \mathbf{R}$, où u et v sont deux

fonctions de la variable t , celle-ci étant appelée le paramètre, d'où le nom d'équations paramétriques.

- Appliquons ces deux méthodes à l'exemple de la cissoïde droite (ou cissoïde de Dioclès), d'équation $x(x^2 + y^2) - 2y^2 = 0$.

- $y^2 = \frac{x^3}{2-x}$, d'où l'étude de la fonction f définie par

$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{2-x}}$, et de la fonction $-f$...

- $\begin{cases} x(x^2 + y^2) - 2y^2 \\ y = tx \end{cases}, t \in \mathbf{R}$ s'écrit $\begin{cases} x = \frac{2t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{2t^3}{1+t^2} \end{cases}, t \in \mathbf{R}$

f) **Quelques exemples :**

Les paramètres varient dans **R**, l'écriture est parfois horizontale pour des raisons de place.

	Équation	Courbe
29	$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$	Astroïde
30	$\begin{cases} x = \frac{a+t}{(1+t^2)^2}; y = tx \end{cases}$	Bifolium
31	$\begin{cases} x = 2 \cos t - \cos 2t \\ y = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases}$	Cardioïde
32	$\begin{cases} x = x_0 + R \cos t \\ y = y_0 + R \sin t \end{cases}$	Cercle
33	$\begin{cases} x = \frac{1}{1+t^2}; y = \frac{1}{t(1+t^2)} \end{cases}$	Cissoïde de Dioclès
34	$\begin{cases} x = \cos \theta; y = \tan \theta \end{cases}$	Conchoïde de Kùlp
35	$\begin{cases} x = a + b \cos t \\ y = a \tan t + b \sin t \end{cases}$	Conchoïde de Nicomède
36	$\begin{cases} x = 1 - a \sin t \\ y = t - a \cos t \end{cases}$	Cycloïde
37	$\begin{cases} x = 2 \cos t + \cos 2t \\ y = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases}$	Deltoïde
38	$\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$	Développante de cercle
39	$\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3}; y = tx \end{cases}$	Folium de Descartes
40	$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t^2}; y = tx \end{cases}$	Lemniscate de Bernoulli
41	$\begin{cases} x = a \cos^2 t + \cos t \\ y = a \sin t \cos t + \sin t \end{cases}$	Limaçon de Pascal
42	$\begin{cases} x = 3 \sin t - \sin 3t \\ y = 3 \cos t - \cos 3t \end{cases}$	Néphroïde
43	$\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; y = tx \end{cases}$	Strophoïde droite
44	$\begin{cases} x = \cos t + \ln\left(\tan \frac{t}{2}\right); y = \sin t \end{cases}$	Tractrice
45	$\begin{cases} x = \frac{3-t^2}{1+t^2}; y = tx \end{cases}$	Trisectrice de Mac-Laurin

5) **Équation tangentielle (cartésienne)**

a) **Définition :** Une courbe (C) admettant en chacun de ses points une tangente dont l'équation est de la forme $ux + vy + w = 0$, on appelle équation tangentielle de (C) une relation caractéristique entre u, v et w vérifiée par toutes les tangentes de (C).

b) **Détermination :** Si la courbe (C) a pour équation cartésienne implicite $F(x; y) = 0$, on définit des coordonnées homogènes $(x'; y'; z')$ telles que $x = \frac{x'}{z'}$ et

$$y = \frac{y'}{z'}. \text{ On forme alors } G(x'; y'; z') = F(x; y) = 0,$$

puis on élimine x', y' et z' dans le système :

$$\begin{cases} ux' + vy' + cz' = 0 \\ \frac{u}{\frac{dG}{dx}} = \frac{v}{\frac{dG}{dy}} = \frac{w}{\frac{dG}{dz}}, \text{ en prenant, après dérivation,} \end{cases}$$

$z = 1$. On appelle équation tangentielle la relation entre u, v et w ainsi obtenue.

c) **Quelques exemples :**

Équation	Courbe
$\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} = \frac{1}{w^2}$	Astroïde
$27w(u^2 + v^2) = 2(u + v)^3$	Cardioïde
$(u\alpha + v\beta + w)^2 = R^2(u^2 + v^2)$	Cercle
$w^2(u^2 + v^2) = (p(u^2 + v^2) + uw)^2$	Cubique de Tschirnhausen
$w(u^2 + v^2) = u(u^2 - 3v^2)$	Deltoïde

6) **Équation différentielle (cartésienne)**

a) **Définition :** Voir polycopié « Équations différentielles ».

b) **Quelques exemples :**

Équation	Courbe
$x(y')^3 + y = 0$	Astroïde
$(x^2 + 2y^2)x y' = y^3$	Cappa
$y^3 + 3x^2y = 2x^3y'$	Cissoïde de Dioclès
$a^2\sqrt{1+y'^2} = b^2 - y^2$	Corde à sauter
$xy'' = k\sqrt{1+y'^2}$	Courbe de poursuite
$y' = \sqrt{\frac{2R-y}{y}}$	Cycloïde droite
$(x + yy')^2 = a^2(1 + y'^2)$	Développante de cercle
$y^2(1 + y'^2) = a^2y'^2$	Tractrice

7) Équations complexes

a) **Définition** : Un point M de coordonnées $(x ; y)$ peut être aussi défini par son affixe $z = x + iy$, qui est un nombre complexe.

Donc les notions vues précédemment peuvent être « traduites » en complexes.

b) **Quelques exemples** :

Équation	Courbe
$z = a(2e^{it} - e^{2it})$	Cardioïde
$z = \frac{2}{3}e^{it} + \frac{1}{3}e^{-2it}$	Deltoïde
$az + b\bar{z} = c$	Droite
$ z - z_0 = R$	Cercle
$ z - a = z - b $	Droite (médiatrice)

II) Coordonnées et équations polaires

Distance à l'origine et angle polaire

1) Coordonnées polaires

a) **Définition** : Soit O un point du plan, et \vec{i} un vecteur normé, c'est-à-dire de norme 1. Soit un point M du plan. Si M est distinct de O , on note α l'une des mesures de l'angle $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$; on l'appelle l'angle polaire de M . On note $r = OM$ la distance de O à M .

• On appelle coordonnées polaires l'un des couples : $(r ; \theta)$ ou $(-r ; \theta + \pi)$, avec $\theta \equiv \alpha \pmod{2\pi}$.

• On a donc : $\overrightarrow{OM} = r((\cos \theta)\vec{i} + (\sin \theta)\vec{j})$.

b) **Relations entre les systèmes de coordonnées cartésienne et polaires** :

- $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- si $x = y = 0$, alors α n'est pas défini, et $r = 0$
- si $x = 0$ et $y > 0$, alors $\theta \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ et $r = y$
- si $x = 0$ et $y < 0$, alors $\theta \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ et $r = -y$
- si $x \neq 0$, alors $\theta \equiv \text{Arc tan} \left(\frac{y}{x} \right) \pmod{2\pi}$

2) Équation polaire explicite

a) **Définition** : Une équation polaire explicite est la donnée de la distance à l'origine r d'un point de la courbe en fonction de son angle polaire θ (ou le contraire). On écrit la relation sous la forme $r = f(\theta)$, où f est une fonction numérique de la variable réelle.

b) **Quelques exemples** :

	Équation	Courbe
46	$r = \cos^2 \theta (a \cos \theta + b \sin \theta)$	Bifolium
47	$r = \cot \theta$	Cappa
48	$r = 1 + \cos \theta$	Cardioïde
49	Cas général : $r^2 + ar \cos \theta + br \sin \theta + c = 0$ si O est sur le cercle : $r = a \cos \theta + b \sin \theta$ si le centre est l'origine du repère : $r = R$	Cercle
50	$r = \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$	Cissoïde de Dioclès
51	$r = \frac{\sin \theta}{\theta}$	Cochléoïde
52	$r = \frac{1}{\cos \theta} + b$	Conchoïde de Nicomède
53	$r = \frac{1}{1 + \lambda e^{-k\theta}}$	Courbe du spirale
54	$r = \left(\cos \left(\frac{\theta}{3} \right) \right)^{-3}$	Cubique de Tschirnhausen
55	$r = \frac{1}{\sin(n\theta)}$, n entier	Épis
56	$r = \sqrt{\cos(2\theta)}$	Lemniscate de Bernoulli
57	$r = a \cos \theta + b$	Limaçon de Pascal
58	$r = \frac{1}{\sqrt{\theta}}$	Lituus
59	$r = \cos^3 \theta$	Ovoïde
60	$r = \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}$	Parabole
61	$r = a \sin(2\theta)$	Rosace à quatre feuilles
62	$r = \sin(3\theta)$	Rosace à trois feuilles
63	$r = \cos(2\theta) - a \cos(\theta)$	Scarabée
64	$r = \theta$	Spirale d'Archimède
65	$r = \frac{1}{\theta}$	Spirale hyperbolique
66	$r = \frac{\cos(2\theta)}{\cos(\theta)}$	Strophoïde droite
67	$r = \cos \theta (\cos 2\theta + b \sin^2 \theta)$	Trifolium
68	$r = \frac{1}{\cos \left(\frac{\theta}{3} \right)}$	Trisectrice de Mac-Laurin

3) Équation polaire implicite

a) **Définition** : Comme pour les équations cartésiennes, ici r et θ sont en relation sous la forme $f(r; \theta) = 0$, où f est ici une fonction à deux variables, d'une partie de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ vers \mathbf{R} .

b) **Quelques exemples**

	Équation	Courbe
69	$r^2 = 49 + \frac{1}{\cos(2\theta)}$	Courbe du diable
70	$r^2 \cos(2\theta) = a^2$	Hyperbole équilatère
71	$r^4 - (2\cos(2\theta))r^2 + 1 - k^4 = 0$	Ovale de Cassini
72	$r^2 = \cot(2\theta)$	Quartique régulière
73	$r^2 = \theta$	Spirale de Fermat

III) Coordonnées et équations intrinsèques

Abscisse curviligne et rayon de courbure

1) Coordonnées intrinsèques

a) **Définitions** : On oriente la courbe (C) . A étant un point fixé de (C) , on appelle abscisse curviligne (notée s) du point M de (C) la distance algébrique, notée AM , calculée de A à M , sur (C) , réel positif si on va de A à M dans le sens défini par l'orientation choisie, et réel négatif sinon.

- On définit aussi le cercle de courbure, ou cercle osculateur au point M de la courbe (C) , comme le cercle qui « épouse le mieux » cette courbe au voisinage de M , dans le même esprit que la tangente se définit grâce à la « meilleure approximation affine ».

Pour information : Si la courbe (C) admet pour équations

$$\text{paramétriques cartésiennes } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

où x et y sont des fonctions au moins deux fois

dérivables, et si on pose $\alpha = \left(\vec{i}; \frac{d\vec{OM}}{dt} \right)$, alors le

centre K du cercle de courbure, appelé centre de courbure relatif à M , de paramètre t , a pour

coordonnées $x - \frac{dy}{d\alpha}$ et $y + \frac{dx}{d\alpha}$, ou encore

$$K \left(x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}, y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} \right).$$

- On appelle alors rayon de courbure relatif à M , noté ρ et valant donc KM , le rayon de ce cercle.

- On montre que $\rho = \frac{ds}{d\alpha}$.

- La courbure de la courbe au point M est alors $\frac{1}{\rho}$.

Remarque : Le mot « intrinsèque » signifie « non lié à un repère », mais seulement lié à des notions liées à la

courbe (même si, ici, on les a définies grâce à un repère).

b) **Propriétés**

- On a : $\rho = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'}$ et $s = \int_a^b (x'^2 + y'^2) dt$

avec A et M ayant pour paramètres respectifs a et b .

[Toutes ces dérivées se font par rapport à t .]

- $dx = ds \cos \alpha$, $dy = ds \sin \alpha$
- $\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$ ou encore $x'^2 + y'^2 = s'^2$

2) Équation intrinsèque explicite

a) **Définition** : Une équation intrinsèque explicite est la donnée du rayon de courbure ρ en un point de la courbe en fonction de son abscisse curviligne s (ou éventuellement le contraire). On écrit la relation sous la forme $\rho = f(s)$, où f est une fonction numérique de la variable réelle.

b) **Quelques exemples**

Équation	Courbe
$\rho = 1 + s^2$	Chaînette
$\rho = a \operatorname{ch}\left(\frac{s}{a}\right)$	Chaînette d'égalité résistance
$\rho = \frac{1}{s}$	Clothoïde
$s = \rho^2$	Développante de cercle
$s = \ln\left(\frac{\rho^2}{4} + 1\right)$	Tractrice

3) Équation intrinsèque implicite

a) **Définition** : Comme pour les types d'équations précédentes, ici s et ρ sont en relation sous la forme $f(s; \rho) = 0$, où f est ici une fonction à deux variables, d'une partie de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ vers \mathbf{R} .

b) **Quelques exemples** :

Équation	Courbe
$\rho^2 + 4s^2 = 9a^2$	Astroïde
$9\rho^2 + s^2 = 64a^2$	Cardioïde
$\rho^2 + s^2 = 16R^2$	Cycloïde droite

IV) Coordonnées et équations barycentriques

Voir le polycopié « Quelques propriétés du triangle »