

CONGRUENCES

I) Multiples

Sauf indication contraire, « entier » signifie entier relatif, donc positif ou négatif.

a) **D1**: Si n est un entier **non nul**, l'entier m est appelé un multiple de n s'il existe un entier k tel que

$$m = k \times n.$$

- On peut aussi dire : m est un multiple de n si et seulement si la fraction $\frac{m}{n}$ est un entier.
- Pour le cas $n = 0$, le seul multiple de 0 est 0 lui-même.
- Exemple** : Comme $63 = 7 \times 9 = (-7) \times (-9)$, on peut dire que 63 est un multiple de 7, mais aussi de 9, et aussi de leurs opposés.

E1 : Indiquer, parmi les entiers suivants, ceux qui sont des multiples d'entiers de cette même liste :

4, 6, 8, 10, 12, 15, 24 et 32.

E2 : Est-il vrai que :

- a) Si l'entier n est un multiple de 15, alors n^2 est un multiple de 45 ?
- b) Si n est un multiple de 6, alors $n^2 + 6n$ est un multiple de 72 ?

E3 : Montrer que, pour tout entier n , $4(n+1)^2 - (n+2)^2$ est un multiple de n .

b) Notation

- L'ensemble des multiples de n se note $M(n)$, ou encore : $n\mathbb{Z} = \{m \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z}, m = k \times n\}$.
- Par exemple, l'ensemble des entiers pairs peut se noter $2\mathbb{Z}$ puisque c'est l'ensemble des multiples de 2. On pourra écrire : $2\mathbb{Z} = \{n \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z}, m = 2k\}$.
- L'ensemble des multiples de 0 est le singleton $\{0\}$.

E4 : Montrer que la somme de deux nombres impairs consécutifs est un multiple de 4.

II) Diviseurs

a) **D2** : Un nombre entier d est un diviseur d'un entier n **non nul** si et seulement s'il existe un entier n' tel que

$$n = d \times n'.$$

- On dit aussi que d divise n . On peut noter $d \mid n$. L'entier n est donc un multiple de d . Donc $n \in d\mathbb{Z}$. Il est équivalent de dire que n est un multiple de d .
- Tout entier est un diviseur de 0.
- Dans tout ce chapitre, les notions de multiples et de diviseurs sont donc interchangeables :

« a divise b », « a est un diviseur de b »
et « b est un multiple de a » sont synonymes.

E5 : Déterminer douze diviseurs positifs de 60.

E6 : Déterminer tous les entiers relatifs n entre -20 et 20 tels que 5 divise $n + 4$.

E7 : Soit a et b deux entiers relatifs.

Montrer que $(a + 2b)^4 - a^4$ est divisible par 8.

E8 : Est-il vrai que :

- a) Le produit de deux diviseurs d'un même nombre est aussi un diviseur de ce nombre ?
- b) Si 4 divise n , alors $\frac{n^2}{4}$ est un entier multiple de 8 ?

b) Propriétés

- P1** : 1 est diviseur de tout nombre entier car $n = 1 \times n$.
- P2** : Tout entier est son propre diviseur car $n = n \times 1$.
- P3** : Tout entier non nul n a qu'un nombre fini de diviseurs, car si d divise n , alors $1 \leq |d| \leq |n|$.
- Remarque** : Si n positif, $-n \leq d \leq n$.
- En particulier**, les entiers 1 et -1 possèdent deux diviseurs, qui sont 1 et -1 .
Les autres entiers possèdent au moins quatre diviseurs, qui sont 1, -1 , n et $-n$.
- Remarque** : Il faudra, dans les exercices, bien vérifier si on parle des diviseurs en général (dans $\mathbb{Z}$) ou seulement des diviseurs positifs (dans $\mathbb{N}$).

E9 : Déterminer tous les entiers relatifs n tels que $2n - 7$ divise 6.

- P4** : Si d est un diviseur de n , alors $-d$ est aussi un diviseur de n car $n = (-d) \times (-n')$. On s'intéressera habituellement aux diviseurs positifs et on notera $D(n)$ l'ensemble des diviseurs **positifs** de n .
- Par exemple, $D(6) = D(-6) = \{1 ; 2 ; 3 ; 6\}$.

E10 : 1) a) Déterminer les entiers relatifs a et b tels que :

$$a \times b = 15.$$

- b) Déterminer l'ensemble des entiers positifs x et y tels que : $x^2 - y^2 = 15$.
- c) Si on ajoute 7 ou 22 à un entier positif n , on obtient dans les deux cas un carré parfait. Déterminer cet entier n .
- 2) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x et y tels que : $x^2 = 4y^2 + 20$.
- 3) Déterminer tous les couples d'entiers naturels x et y tels que $x^2 = 15 + 2xy$

- P5** : Si a divise b et b divise a , alors $a = b$ ou $a = -b$.

- **P6** : Si d divise a et b (on dit alors que d est un diviseur commun de a et de b), alors d divise toute combinaison linéaire de a et b , du type $\lambda a + \mu b$, avec λ et μ entiers, en particulier $a + b$ et $a - b$.
- **P7** : Soit a , b et c trois entiers tels que a divise b et b divise c . Alors a divise c .
On dit que la relation « *divise* » est transitive.

E11 : Est-il vrai que :

- Si d est un diviseur commun de a et de b , alors $3d$ divise $6a + 9b$?
- Si d est un diviseur commun de a et de b , alors d^3 divise $a^3 + 3a^2b - 12b^2$?

E12 : a) Développer l'expression $(a + b)^3$.

- Soit a et b deux entiers relatifs. Montrer que 3 divise $a^3 + b^3$ si et seulement si 3 divise $(a + b)^3$.

- E13** : a) Déterminer tous les entiers n strictement supérieurs à 1 tels que $n - 1$ divise $2n + 10$.
- Déterminer les entiers relatifs n tels que $6n + 5$ soit divisible par $2n - 1$.
 - Déterminer les entiers relatifs n tels que $3n + 7$ divise $5n + 15$.
 - Déterminer les points à coordonnées entières de la courbe d'équation $y = \frac{x+18}{x+4}$.

E14 : a) Soit n un entier naturel. Simplifier :

$$3n^2 + 5n + 8 - (n + 2)(3n - 1).$$

- En déduire les entiers naturels n tels que $n + 2$ divise $3n^2 + 5n + 8$.
- En déduire les entiers relatifs n tels que $n^2 + 2$ divise $3n^4 + 5n^2 + 8$.

E15 : a) Soit d et n deux entiers naturels non nuls. Montrer que si d divise à la fois $a = 2n + 6$ et $b = 3n + 8$, alors d divise un entier positif indépendant de n que l'on déterminera.

- En déduire les valeurs possibles de d , et les valeurs de n correspondantes.

E16 : On dit que deux entiers sont premiers entre eux lorsque leur seul diviseur commun positif est 1.

- Montrer que, pour tout entier relatif n , les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.
- En est-il de même pour $a = 6n + 4$ et $b = 8n + 5$?

III) Division euclidienne dans les entiers

a) T1 : Soit a et b des entiers **naturels** et b **non nul**.

Alors il existe un unique couple $(q ; r)$ d'entiers tel que : $a = b \times q + r$ et $0 \leq r < b$,
(donc $0 \leq r \leq b - 1$)

- a , b , q et r s'appellent respectivement dividende, diviseur, quotient et reste de la division euclidienne.
- Si r est nul, alors b divise a et on retrouve les définitions de I a) et II a).

E17 : Effectuer la division euclidienne de 43 par 7, de 9 par 23, de 2491 par 47, de 547 par 17.

E18 : On considère l'égalité $38367 = 152 \times 251 + 215$.

Est-ce la traduction de la division euclidienne de 38367 par 152 ?

Est-ce la traduction de la division euclidienne de 38367 par 251 ?

Si ce n'est pas le cas, indiquer la division euclidienne correcte.

E19 : Soit a et b deux entiers strictement positifs.

La division euclidienne de a par b a pour quotient 7 et pour reste 24. Déterminer le reste de la division euclidienne de a par 7.

E20 : L'entier n étant strictement positif, effectuer la division euclidienne de $(n + 3)^2$ par $n + 6$.

E21 : a) Déterminer les diviseurs entiers naturels de 12.

- Par quels entiers naturels faut-il diviser 12 pour que le quotient soit égal au reste ?

E22 : Deux entiers naturels ont une différence égale à 538. La division euclidienne du plus grand par le plus petit a pour quotient 13 et pour reste 34. Déterminer ces deux nombres.

E23 : Déterminer s'il existe deux nombres entiers positifs a et b dont le produit est égal à 203 et tels que la division euclidienne de a par b a pour quotient 3 et pour reste 8.

E24 : En divisant 219 par un certain entier b strictement positif, on obtient comme reste 10, et en divisant 204 par ce même nombre b , on obtient 6 comme reste. Déterminer la valeur de b .

E25 : Existe-t-il des entiers naturels n tels que le quotient dans la division de 36 par n est égal au double du reste ? Si oui, lesquels ?

b) Détermination pour a positif

- **Classique** : On peut effectuer la division comme il est d'usage de le faire en Primaire (en France) :

$$\begin{array}{r|l} a \rightarrow 22 & 7 \leftarrow b \\ r \rightarrow 1 & 3 \leftarrow q \end{array}$$

- **Calculatrice** : On peut aussi calculer q et r en remarquant que $q = E(a/b)$, où $E(x)$ est la partie entière de x , c'est-à-dire le plus grand entier plus petit ou égal à x . On a alors $r = a - b \times q$. $\frac{22}{7} \approx 3,14$ donc $q = 3$ et $r = 22 - 7 \times 3 = 1$
- **Calculatrice et tableur** : La partie entière s'écrit ENT (de *entier*), ou INT (de *integer* : entier en anglais). Le reste de la division euclidienne de a par b s'écrit : $a \text{ MOD } b$, ou $\text{MOD}(a; b)$ (MOD vient de *modulo*)

c) Détermination pour a négatif

- Rappelons que r est toujours positif. Pour déterminer q et r dans ce cas, il est classique d'utiliser la division euclidienne de $-a$ par b .
- Si b divise a , on écrit : $a = b \times q$ donc $-a = b \times (-q)$
- Sinon, sur un exemple, on a : la division de 22 par 7 s'écrit $22 = 7 \times 3 + 1$, donc, pour la division de -22 par 7, on peut écrire $-22 = 7 \times (-3) - 1$, qui ne convient pas puisque -1 est négatif. On ajoute 7 au reste, que l'on retranche à $7 \times (-3)$, ce qui donne $-22 = 7 \times (-4) + 6$.
- Dans le cas général, si la division de a (positif) par b est $a = b \times q + r$, alors celle de $-a$ par b sera :
 - $-a = b \times (-q)$ si r est nul
 - $-a = b \times (-q - 1) + (b - r)$ si r est non nul

E26 : Effectuer la division euclidienne de -324 par 15.

IV) Congruences

- a) **P8** : Si a est un entier relatif et b un entier strictement positif, alors a peut s'écrire $a = r + k \times b$, où k est un entier relatif et r un entier entre 0 et $b - 1$.

b) D3 : Soit n un entier non nul.

- On définit la congruence modulo n par :
« x congru à y modulo n » si et seulement si $x - y$ est un multiple de n , c'est-à-dire $x - y \in n\mathbb{Z}$.
On note $x \equiv y \pmod{n}$, ou encore $x \equiv y [n]$.
- **Remarques** : La congruence modulo 0 n'existe pas, la congruence modulo 1 n'a aucun intérêt, et la congruence modulo $-n$ est la même que celle modulo n ; on peut donc choisir n strictement positif.

c) Exemples

- $1234 = 1230 + 4$ et 1230 est un multiple de 10, donc on peut écrire $1234 = 4 + 123 \times 10$ donc $1234 \equiv 4 [10]$.
- Tout nombre impair n est congru à 1 modulo 2, car $n - 1$ est un multiple de 2. On écrira $n \equiv 1 [2]$.

- Le 1^{er} janvier 2018 fut un lundi. Si on numérote les jours de 2018 de 1 à 365, les autres lundis de l'année sont les jours numéros 8, 15, 22..., donc tous congrus à 1 modulo 7.

E27 : Est-il vrai que :

- a) Si n est un entier tel que 7 divise $n + 4$, alors $n \equiv 3 [7]$?
- b) Si a est un entier tel que $a + 5 \equiv 0 [12]$, alors il existe un entier k tel que $a = -17 - 12k$?

E28 : Les congruences suivantes sont-elles exactes ?

$$36 \equiv 15 [7] ; -53 \equiv 17 [7] ; 23 \equiv -17 [6] ; 52 \equiv 13 [-3]$$

E29 : Déterminer les entiers naturels n vérifiant :

$$14 \equiv 2 [n]$$

d) Propriétés des congruences

Les lettres suivantes représentent des entiers.

- **P9** : Si $n > 0$, si $a \equiv b [n]$ et si $0 \leq b \leq n - 1$, alors b est le reste de la division euclidienne de a par n .

En particulier, si $b = 0$, la congruence $a \equiv 0 [n]$ signifie : a est un multiple de n .

- **P10** : Si $x \equiv y [n]$ et si d divise n , alors $x \equiv y [d]$
- **P11** : $x \equiv y [n]$ si et seulement si $x - y \equiv 0 [n]$

En particulier : $x \equiv x [n]$, et aussi $y \equiv x [n]$

- **P12** : Si $a \equiv b [n]$ et $b \equiv c [n]$, alors $a \equiv c [n]$
- **P13** : Si $k \neq 0$, alors :

$$x \equiv y [n] \text{ est équivalent à } kx \equiv ky [kn]$$

- **P14** : Si $x \equiv y [n]$ et $x' \equiv y' [n]$, alors :

$$x + x' \equiv y + y' [n] \text{ et } x - x' \equiv y - y' [n]$$

- **P15** : Si $x \equiv y [n]$ et $x' \equiv y' [n]$, alors $xx' \equiv yy' [n]$
- **P16** : Si p est positif et $x \equiv y [n]$, alors $x^p \equiv y^p [n]$

E30 : Soit a, b et c trois entiers relatifs vérifiant :

$$a \equiv 353 [7], b \equiv -71 [7] \text{ et } c \equiv 943 [7]$$

- a) Préciser les restes des divisions euclidiennes de ces trois nombres par 7.
- b) En déduire les restes des divisions euclidiennes par 7 de : $d = 2a + 3b - 4c$, $e = a \times b \times c$ et $f = a^2 + b^3 - c^2$.

E31 : Est-il vrai que :

- a) Si les entiers a et b vérifient $a \equiv b [5]$,
alors $2a \equiv 2b [5]$?
- b) Si les entiers a et b vérifient $a \equiv b [6]$,
alors $a^2 \equiv b^2 [36]$?

E32 : Montrer que $2019^{2018} + 1$ est divisible par 17.

E33 : a) Montrer que, pour tout entier n ,
 $n(n+1)(2n+1)$ est un multiple de 6.

b) Montrer de même que, pour tout entier n , $n(n^2 + 5)$
est divisible par 3.

E34 : a) Soit n un entier relatif. Préciser, sous forme de
tableau, le reste de la division euclidienne de n^2 par 4
selon le reste de la division euclidienne de n par 4.

b) En considérant la congruence modulo 4, prouver que
l'équation $x^2 + 3y^2 = 942$ n'a pas de solutions
entières.

E35 : a) Soit n un entier. Faire la liste des restes de la
division euclidienne de n^3 par 9 en fonction du reste
de la division euclidienne de n par 9.

b) En déduire que la somme des cubes de trois entiers
consécutifs est toujours divisible par 9.

E36 : a) Montrer que si un entier positif n n'est pas
divisible par 3, alors $n^2 - 1$ est divisible par 3.

b) En déduire que si trois entiers positifs sont les
longueurs respectives des côtés d'un triangle
rectangle, alors au moins l'un de ces trois nombres est
divisible par 3.

E37 : a) Montrer que, pour tout entier naturel n ,
 $5 \times 3^{2n+1} + 6 \times 4^{2n}$ est multiple de 7.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n ,
 $16 \times 7^{2n} - 28 \times 3^{2n+3}$ est divisible par 5.

E38 : a) Déterminer la plus petite valeur strictement
positive de l'entier a telle que $2^a \equiv 1 [5]$.

b) Soit n un entier positif. Préciser, sous forme de
tableau, le reste de la division euclidienne de 2^n par 5
pour les valeurs de n entre 0 et 10.

c) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^n
par 5 selon les valeurs de n .

d) Préciser alors le reste de la division euclidienne par 5
des entiers suivants : 2^{17} ; 2^{312} ; 2^{514} et 2^{78315} .

e) En déduire le reste de la division euclidienne par 5 de
 2917^{514} , puis de 3564^{78315} .

V) Critères de divisibilité

a) Règles

Le nombre n est divisible :	
par 2 ou par 5 (par d diviseur de 10)	lorsque le chiffre des unités de n est aussi divisible par 2 ou par 5.
par 3 ou par 9 (par d diviseur de $10 - 1$)	lorsque la somme des chiffres de n est aussi divisible par 3 ou par 9.
par 11 (par d diviseur de $10 + 1$)	lorsque la somme alternée des chiffres de n est aussi divisible par 11.
par 4 ou par 25 (par d^2 si d divise 10)	lorsque le nombre formé des deux chiffres « de droite » de n est divisible par 4 ou 25

E39 : Montrer que, pour tout entier positif a , a^5 a même
chiffre des unités que celui de a .

b) La « preuve par neuf » (enseignée en Primaire)

Cette « preuve » consiste, après avoir effectué le
produit de deux nombres entiers, à effectuer le même
calcul sur les restes modulo 9 des opérandes (nombres
que l'on multiplie) et à vérifier que l'on obtient bien le
même résultat. On applique :

$$a \equiv a' [9] \text{ et } b \equiv b' [9] \text{ donc } a \times b \equiv a' \times b' [9]$$

Le reste modulo 9 s'obtient par sommes successives
des chiffres.

Exemple : $1357 \times 2468 = 3349076$

$$\text{On a : } 1357 \equiv 7 [9], 2468 \equiv 2 [9], 7 \times 2 \equiv 14 \equiv 5 [9]$$

$$\text{et on a bien } 3349076 \equiv 5 [9]$$

Si on n'obtient pas le même nombre (et que la preuve
a été bien faite !), la multiplication est fautive ; sinon,
cela ne prouve rien (soit c'est bon, soit c'est faux et on
a eu un peu de chance !!)

E40 : Donner un exemple de multiplication fautive
donnant cependant une « preuve par neuf » exacte.

c) La numération de position

- Si a , b et c sont des chiffres (donc des entiers entre 0
et 9), l'expression $\overline{abc}$ représente l'entier
 $100a + 10b + c$, selon le principe de l'écriture
décimale dite de position.
- Il est habituel dans les exercices de ce type que le
chiffre le plus à gauche soit supposé non nul.
- La notation se généralise à tout nombre de chiffres.

E41 : a) Déterminer les chiffres a et b tels que $\overline{a57b}$ soit
simultanément un multiple de 5 et de 9.

b) Déterminer les chiffres u et v tels que $\overline{u5v}$ soit
simultanément un multiple de 2, 3 et 11.