

FONCTIONS

Continuité

Théorème des valeurs intermédiaires

I) Continuité

1) **P1** : Soit f une fonction définie sur un intervalle I ouvert. Si f admet une limite finie L en a et si f est définie en a , alors $L = f(a)$.

2) **D1** : Soit f une fonction définie sur un intervalle I ouvert, contenant le réel a . On dira alors que :

- f est continue en a si et seulement si f admet une limite finie en a . Cette limite est égale à $f(a)$.
- f est continue sur I si et seulement si f est continue pour tout réel a de I .

- **Remarques** : La courbe d'une fonction continue sur un intervalle I n'a pas de « coupure » sur I ; on la trace « sans lever le crayon ».
- Si une fonction est continue sur un intervalle I , alors elle est définie sur I . La réciproque est fausse.
- **Contre-exemple** : La fonction valant 0 pour toute valeur non nulle, et valant 1 en 0.
- **Attention !** On parle de continuité **sur un intervalle** mais non sur une réunion quelconque d'intervalles.
- Si une fonction n'est pas continue en un réel a , on dit qu'elle est discontinue en a .

II) Fonctions usuelles, opérations et continuité

1) Propriétés

- **P2** : Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbf{R}$.
- **P3** : La fonction racine carrée est continue sur $\mathbf{R}_+$.
- **P4** : La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbf{R}$.
- **P5** : Si les fonctions u et v sont continues en a , alors les fonctions $u + v$, $u \times v$, u^n (pour n entier positif) sont continues en a .
- **P6** : Si la fonction u est continue en a et si $u(a) \neq 0$, alors la fonction $\frac{1}{u}$ est continue en a .
- **P7** : Une fonction rationnelle est continue sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

E1 : Étudier la continuité des fonctions définies par :

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \frac{x^2 - 1}{x + 1} \text{ pour } x \neq -1 \text{ et } f(-1) = -2 \\ \text{b) } g(x) &= \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \text{ pour } x > 1 \text{ et } g(1) = 1 \end{aligned}$$

- **P8 : Composée** : Si une fonction f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a .
- **P9** : Si f est continue sur un intervalle I et si g est continue sur un intervalle J contenant l'ensemble-image $f(I)$, alors $g \circ f$ est continue sur I .

E2 : Étudier la continuité de la fonction f définie sur $[2; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.

2) Continuité à gauche et à droite

- **D2** : Grâce aux notions de limites à gauche et à droite vues précédemment, on définit de la même façon la continuité à gauche et la continuité à droite lorsque la fonction est définie en ce point.

Ainsi, si f est définie en a et admet une limite à gauche en a , celle-ci ne peut être que $f(a)$ et on dit alors que f est continue à gauche en a .

- Même définition à droite.

- **P10** : Une fonction est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et continue à droite en a .

E3 : Soit m un réel fixé. Soit f la fonction définie

$$\text{sur } \mathbf{R} \text{ par } f(x) = \begin{cases} 2x + m & \text{si } x \leq 1 \\ 3x^2 - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Discuter de la continuité à gauche, à droite et globale en 1 en fonction de la valeur du paramètre m .

3) Exemples classiques de fonctions discontinues

- **D3** : On appelle fonction partie entière la fonction qui, à tout réel x , associe le plus grand des entiers inférieurs ou égaux à x , c'est-à-dire l'unique entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$.
- Ce nombre entier est appelée « partie entière » de x et est noté $E(x)$.
- La partie décimale de x est définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$F(x) = x - E(x)$$

E4 : Tracer les représentations graphiques de E et F sur l'intervalle $[-2; 3]$. Étudier leur continuité.

III) Théorème des valeurs intermédiaires

1) Image d'un intervalle par une fonction continue

- **P11** : Soit I un intervalle de l'une des quatre formes suivantes : $[a; b]$, $]a; b]$, $[a; b[$ ou $]a; b[$.

Soit f une fonction continue sur I . Alors l'ensemble-image $f(I)$ est un intervalle.

- **P12** : Lorsque I est l'intervalle fermé $[a; b]$, alors on peut affirmer que $f(I)$ est aussi un intervalle fermé, de la forme $[m; M]$, où m et M sont respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs prises par f sur l'intervalle $[a; b]$.
- Dans les autres cas, aucune propriété générale ne peut être énoncée.

2) Théorème des valeurs intermédiaires (admis)

- **P13** : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux éléments distincts de I .

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

il existe au moins un réel c

compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

- Si on suppose que $f(a) \leq f(b)$, on en déduit alors que $[f(a); f(b)] \subset f([a; b])$.
- Sinon, $[f(b); f(a)] \subset f([a; b])$

E5 : Montrer que l'équation $x^3 + 3x^2 - 2 = 0$ a **au moins** une solution dans l'intervalle $[0; 1]$.

E6 : a) f étant une fonction continue sur $[0; 1]$ telle que $f([0; 1]) \subset [0; 1]$, montrer que l'équation $f(x) = x$ a au moins une solution dans $[0; 1]$.
b) Interpréter graphiquement ce résultat.

3) Cas des fonctions continues strictement monotones

- **P14 :** Si f est une fonction continue et strictement croissante sur $[a; b]$, alors $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$.
- **P15 :** Si f est continue et strictement décroissante sur $[a; b]$, alors $f([a; b]) = [f(b); f(a)]$.

- **P16 :** *Théorème des valeurs intermédiaires appliqué à une fonction strictement monotone.*
- Soit f , fonction **continue et strictement monotone** sur un **intervalle** I et soit a et b deux éléments distincts de I .
Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, **il existe un et un seul** réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.
- On l'appelle aussi le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

E7 : Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = x^3 - 5x + 2$
Montrer que, sur l'intervalle $[0; 1]$, l'équation $f(x) = 1$ possède une unique solution, notée α .

- **Cas particulier important :** Lorsque $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe différent, c'est-à-dire $f(a) \times f(b) < 0$, on peut appliquer le théorème avec $k = 0$, et on a ainsi un cas particulier très important :
- Si f est une fonction continue strictement monotone avec un intervalle-image contenant 0, l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $[a; b]$.

4) Théorème des valeurs intermédiaires généralisé

- **P17 :** Soit I un intervalle d'une des formes suivantes : $]-\infty; b]$, $]-\infty; b[$, $[a; +\infty[$, $[a; +\infty[$ ou $]-\infty; +\infty[$.
- Soit f une fonction continue sur I , intervalle borné ou non. Alors l'ensemble-image, noté $f(I)$, est toujours un intervalle, borné ou non.
- **P18 :** **Extension aux bornes infinies du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à une fonction strictement monotone.**
- Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle $]a; b[$, où a désigne soit un réel soit $-\infty$ et b soit un réel soit $+\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ (où α est un réel, ou $-\infty$ ou $+\infty$) et $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \beta$ (où β est un réel, ou $-\infty$ ou $+\infty$), alors pour tout réel k compris entre α et β , **il existe un et un seul** réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

- On l'appelle aussi le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires généralisé**.

E8 : Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

- Étudier limites et variations de f .
- Déterminer le nombre de solutions de $f(x) = 0$.

5) Quelques méthodes d'encadrement d'une solution de l'équation $f(x) = 0$.

- **Remarque :** Pour résoudre l'équation $f(x) = k$, il suffit de résoudre l'équation $f(x) - k = 0$. On peut donc toujours se ramener à une équation $g(x) = 0$...

a) Encadrement donné dans l'énoncé et à vérifier

- Si l'énoncé indique : « Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique entre a et b », alors, si la fonction f est **continue** et **strictement monotone** sur l'intervalle $[a; b]$, on montre que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposé.
- Ne pas oublier de faire apparaître ces trois notions soulignées ci-dessus dans l'explication.

b) Dichotomie : Encadrement à 10^{-p} , p entier positif.

- Si on sait que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[a; b]$, on calcule $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Si ce nombre est du même signe que $f(a)$, alors la solution est dans $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$, sinon dans $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$.

- On continue le procédé en calculant l'image par f de la demi-somme des bornes de l'intervalle.
- Au bout de n étapes, l'intervalle a pour amplitude $\frac{b-a}{2^n}$. On s'arrêtera donc lorsque ce nombre est inférieur ou égal à 10^{-p} .

E9 : a) Construire un algorithme de la dichotomie.

- Appliquer cet algorithme à l'équation $x^2 = 2$ sur l'intervalle $[1; 2]$ pour déterminer un encadrement de la solution d'amplitude inférieur à 0,01.

c) Balayage : Précision à n décimales

- **Sur un exemple :** Si on sait que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[5; 6]$, on calcule successivement $f(5)$, $f(5,1)$, $f(5,2)$, $f(5,3)$... jusqu'à ce que le nombre trouvé n'ait pas même signe que le précédent, par exemple $f(5,4)$.
- Puis, à partir du nombre précédent, donc ici 5,3, on calcule $f(5,31)$, $f(5,32)$... jusqu'à ce que le nombre trouvé n'ait pas même signe que le précédent, et ainsi de suite jusqu'au nombre de décimales souhaité.

E10 : Reprendre les exercices **E7** et **E8** pour donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement d'amplitude 0,01 de la ou les solution(s).