NOMBRES COMPLEXES

Définitions – Conjugué – Équations

I) Introduction

a) Historique

- Les nombres complexes ont été inventés au milieu du XVI[e] siècle par des mathématiciens italiens, à l'occasion de la recherche de résolution des équations polynomiales du troisième degré.
- Ceux-ci ont tenté de résoudre l'équation $x^3 = 15x + 4$, dont 4 est solution. En appliquant une formule, dite <u>*de Cardan*</u> (*voir polycopié spécifique*), on fait apparaître un nombre dont le carré vaudrait –484…

b) Le nombre *i*

- On définit un nombre i dont le carré vaut –1. Ce nombre n'appartient pas à l'ensemble des réels, puisque le carré d'un réel est toujours positif.
- On peut ainsi créer de nouveaux nombres, comme $2i$, $-5i$, $2 + 3i$, en utilisant les règles de calcul usuelles dans l'ensemble **R**.

E1 : Calculer $(2i)^2$, $(-5i)^3$, $(2 + 3i)^2$ et $(1 + 2i)(2 - i)$ grâce aux règles de calcul de **R** et le fait que $i^2 = -1$.

c) Nouveaux ensembles

- **D1** : On crée un <u>*sur-ensemble*</u> de **R** contenant les réels et le nombre « non-réel » i, solution de $x^2 + 1 = 0$. Pour pouvoir résoudre d'autres équations, créer d'autres nombres et effectuer des opérations dans ce nouvel ensemble, noté **C**, on décide de le munir de la même « structure » que celle de **R**.

II) Extensions de la création de i

a) Résolution de $x^2 + 1 = 0$: Comme $i^2 = -1$, on peut écrire cette équation $x^2 - i^2 = 0$, d'où $(x + i)(x - i) = 0$, donc $x = i$ ou $x = -i$. On crée ainsi le nombre $-i$.

E2 : Résoudre de la même façon les équations :
$x^2 + 4 = 0$ et $x^2 - 4x + 13 = 0$.

b) Nouveaux nombres : On crée ainsi des nombres de la forme $a + bi$, avec a et b nombres réels, et i un nombre non-réel, vérifiant $i^2 = -1$.

E3 : Calculer, selon les valeurs de l'entier relatif n, les valeurs de i^n, puis de $S = i^{2016} + i^{2017} + i^{2018} + i^{2019}$.

c) Les deux opérations de base

- **P1 :** Soit a, b, a' et b' quatre réels. En utilisant la <u>*commutativité*</u> et l'<u>*associativité*</u> de + et de × et la <u>*distributivité*</u> de × par rapport à +, on a :

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$$

$$(a + bi) \times (a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$$

E4 : a) Calculer $z = 2(6 - 5i) - 3(4 + i)$, $z' = (3-4i)\times(5+7i)$ et $z'' = \left(\sqrt{2} - 3i\right)^2$.

b) On pose $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer j^2, j^3 et $1 + j + j^2$.

III) Définition et construction de C

a) D2 : On appelle <u>*nombre complexe*</u> un nombre pouvant s'écrire $a + bi$, avec a et b des nombres réels, et i un **nombre non-réel**, vérifiant $i^2 = -1$. On note **C** cet ensemble. Il contient les nombres réels, obtenus lorsque $b = 0$. On remarque à nouveau que $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

b) P2 : Si a et b sont des <u>**réels**</u>, alors :
$a + ib = 0$ si et seulement si $a = b = 0$.

- **Attention !** Cette propriété n'est valable que si a et b sont réels. **Contre-exemple** : $1 + i \times i = 0$

c) Extension de la propriété – Unicité de l'écriture

- **P3** : Soit z et z' deux nombres complexes. On pose $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec a, b, a' et b' quatre nombres **réels**. Alors :

$$\boxed{(z = z') \text{ si et seulement si } (a = a' \text{ et } b = b')}$$

- **D3** : Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme $z = a + ib$ avec a et b réels. a s'appelle la <u>*partie réelle*</u> de z et b la <u>*partie imaginaire*</u> de z.
- **Notations** : $a = \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}\, z$ et $b = \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}\, z$
- **Attention !** Malgré son nom, la partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre **réel**.
- **D4** : L'écriture $z = a + ib$ avec a et b réels, s'appelle la <u>*forme algébrique*</u> du nombre complexe z. On dit aussi l'<u>*écriture algébrique*</u>.

d) Interprétation géométrique d'un complexe

- **D5** : La forme algébrique d'un nombre complexe est unique, comme le sont les coordonnées d'un point M ou d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans un repère $\mathfrak{R} = (O\,;\vec{u},\vec{v})$: $\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$. Ainsi, le complexe $x + iy$ est appelé l'<u>*affixe*</u> (nom féminin) du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
- **Notation :** $\mathrm{aff}(M) = \mathrm{aff}\left(\overrightarrow{OM}\right) = x + iy$.
- **Remarque :** Lorsque les points du plan géométrique, muni d'un <u>repère orthonormé</u> $\mathfrak{R} = (O\,;\vec{u},\vec{v})$, sont repérés non plus par leurs coordonnées, mais par leur affixe, on parle de <u>*plan complexe*</u>, ou encore de <u>*plan d'Argand-Cauchy*</u>.
- Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. Soit M et M' deux points du plan d'affixes respectives z et z'. Alors :
  - la somme $z + z'$ est l'affixe du point S tel que $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$
  - la différence $z' - z$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$

E5 : Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, si $z = a + ib$ est l'affixe du point $M(a\,;b)$, déterminer (à l'aide d'une figure) les affixes de :

- M_1, symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses,
- M_2, symétrique de M par rapport à O,
- M_3, symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées,
- M_4, sym. de M par rapport à la droite d'équation $y = x$.

e) Deux sous-ensembles remarquables de C

- On a déjà cité le cas de l'ensemble des réels, qui sont les nombres complexes de partie imaginaire nulle.
- Les nombres complexes de partie réelle nulle, donc de la forme ib avec b réel, s'appelle les *(nombres) imaginaires purs*. Leur ensemble est noté $i\mathbf{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres s'écrivant comme le produit de i par un réel.
- 0 est le seul nombre à la fois réel et imaginaire pur.

E6 : Montrer que l'équation :

$$z^3+(2i-1)z^2+(3-2i)z+6i=0$$

admet une solution imaginaire pure, à déterminer.

- **P4 : Graphiquement**, les réels a sont les affixes des points de coordonnées $(a\,;0)$, donc ceux de l'axe des abscisses, appelé aussi *axe des réels*. Les imaginaires purs ib sont les affixes des points de coordonnées $(0\,;b)$, donc ceux de l'axe des ordonnées, appelé aussi *axe des imaginaires purs*.
  Le nombre 0 est l'affixe de l'origine du repère, qui est bien à l'intersection de ces deux axes.

f) Opérations sur les nombres complexes

- On a déjà vu en **P1** comment effectuer la somme et le produit de deux nombres complexes.
- L'opposé d'un complexe z est le nombre z' tel que $z+z'=0$. On a donc $z'=-z=-a-ib$
- La différence est définie par $z-z'=z+(-z')$
- L'inverse d'un complexe z **non nul** est le nombre z'' tel que $z\times z''=1$. On a donc $z''=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a+ib}$.
- Pour pouvoir l'écrire sous forme algébrique, multiplions les numérateur et dénominateur par $a-ib$, dans l'esprit de la multiplication par la « quantité conjuguée » de certains calculs algébriques.
- En effet, $(a+ib)(a-ib)=a^2-(ib)^2=a^2+b^2$ est réel.
  Ainsi : $\dfrac{1}{a+ib}=\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}=\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}\right)+i\left(\dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)$
- Le quotient de deux complexes est défini par :
  $$\frac{z}{z'}=z\times\frac{1}{z'}\ \text{(avec } z'\neq 0)$$

E7 : Déterminer les formes algébriques de

$z_1=\dfrac{1}{i}$; $z_2=\dfrac{1}{2+3i}$; $z_3=\dfrac{1}{2i-5}$ et $z_4=\dfrac{3+2i}{2-i}$.

E8 : Soit z un nombre complexe distinct de 1, de forme algébrique $z=x+iy$, avec x et y réels. Déterminer, en fonction de x et de y, la partie réelle X et la partie imaginaire Y du nombre complexe $Z=\dfrac{2iz}{z-1}$.

E9 : Résoudre dans **C** : a) $iz+2-i=0$

b) $(3+5i)z=1-z$ c) $\dfrac{1}{z+i}=3+i$ d) $\begin{cases}z-z'=i\\ iz+z'=1\end{cases}$

IV) *Conjugué d'un nombre complexe*

a) D6 : Pour tout nombre complexe z, dont la forme algébrique est $a+ib$ (donc avec a et b réels), on appelle *(nombre) complexe conjugué* de z le nombre noté $\bar{z}$ (lire « *z barre* ») et vérifiant $\bar{z}=a-ib$.

- On a donc $\mathrm{Re}(\bar{z})=\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\bar{z})=-\mathrm{Im}(z)$
- **P5** : On remarquera que $\bar{\bar{z}}=z$.

E10 : Déterminer les conjugués de :
$z_1=3$; $z_2=2i$; $z_3=1+2i$; $z_4=1-3i$ et $z_5=4i-7$

E11 : Résoudre dans **C** les équations suivantes :

a) $i\,\bar{z}=3+2i$ b) $(z+i)(2\bar{z}-3+i)=0$

c) $2z+6\bar{z}=3+2i$ d) $z^2-3\bar{z}+2=0$

b) Propriétés

- **P6** : **Graphiquement**, si z est l'affixe d'un point M, son conjugué $\bar{z}$ est l'affixe du symétrique M' de M par rapport à l'axe des abscisses.

Pour tous nombres complexes z et z' :

- **P7** : z est réel si et seulement si $\bar{z}=z$.
- **P8** : z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z}=-z$
- **P9** : *Formules d'Euler* (première écriture) :
  $$\boxed{\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}\ \text{ et }\ \mathrm{Im}(z)=\frac{z-\bar{z}}{2\,\boldsymbol{i}}}$$
- **P10** : $\overline{z+z'}=\bar{z}+\overline{z'}$
- **P11** : $\overline{z\times z'}=\bar{z}\times\overline{z'}$ (donc, si k réel, $\overline{k\times z}=k\times\bar{z}$)
- **P12** : $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z'}}$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\bar{z}}{\overline{z'}}$, avec z' non nul
- **P13** : $(\bar{z})^n=\overline{z^n}$, avec n entier relatif

E12 : On pose $z_1=\dfrac{5-i}{3+2i}$ et $z_2=\dfrac{5+i}{3-2i}$.
Sans calculs inutiles, expliquer pourquoi z_1+z_2 est réel et que z_1-z_2 est imaginaire pur.

E13 : Calculer de deux façons les complexes suivants :

$z_1=\overline{(3+i)(-13-2i)}$, $z_2=\overline{(2+5i)^3}$ et $z_3=\overline{\left(\dfrac{2-3i}{8+5i}\right)}$

- **P14** : Résolution dans **C** de l'équation
  $$(E):\ a\,z^2+b\,z+c=0$$
  où a, b et c sont **trois réels** (a non nul) :
  On définit le discriminant $\Delta=b^2-4ac$.
- Si $\Delta>0$, (E) a deux solutions réelles distinctes
  $$z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\ \text{ et }\ z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
- Si $\Delta=0$, (E) a une solution réelle (double) $z_0=-\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta<0$, (E) a deux solutions complexes non réelles et conjuguées : $z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

E14 : Résoudre dans **C** : a) $z^2-z+1=0$
b) $2z^2-3z+4=0$ c) $z^4+z^2-6=0$