NOMBRES COMPLEXES
Module – Argument – Forme exponentielle

I) Module d'un nombre complexe

a) D1 : On a vu précédemment que, pour tous réels a et b, $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$, donc le produit d'un nombre complexe par son conjugué est un réel positif.
On appelle *module* de z, nombre complexe dont l'écriture algébrique est $a+ib$ (donc avec a et b réels), le réel positif $\sqrt{a^2+b^2}$, qui est noté $|z|$.

- **Remarque** : La notation utilisée est la même que celle de la valeur absolue dans les réels.
Ce choix est volontaire, car si z est réel, $|z|=\sqrt{a^2}=|a|$, qui est bien la valeur absolue du réel a.
- **Attention !** On remarquera qu'on peut écrire $z\times\overline{z}=|z|^2$ ou encore $|z|=\sqrt{z\times\overline{z}}$, mais on a vu qu'on ne définit pas dans les complexes la notation « $\sqrt{z}$ ».
Ainsi, cette dernière égalité peut être dangereuse à utiliser car la formule $\sqrt{u\times v}=\sqrt{u}\times\sqrt{v}$, valable dans les réels positifs, ne s'applique pas ici.

E1 : Calculer les modules des nombres complexes :
$$z_1=7\ ;\ z_2=-2\ ;\ z_3=3i\ ;\ z_4=-5i$$
$$z_5=3+4i\ ;\ z_6=8i-5\ ;\ z_7=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

E2 : Montrer que, si $|1+iz|=|1-iz|$, alors z est réel.

b) Interprétation graphique du module

- **P1** : **Graphiquement**, si on se place dans le plan complexe, et si z est l'affixe d'un point M, alors le module $|z|$ est la distance OM.
Plus généralement, si A et B sont deux points d'affixes respectives a et b, alors le module $|b-a|$ est la norme $\|\overrightarrow{AB}\|$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire la distance AB.

E3 : Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.
Déterminer l'ensemble des points M d'affixes z tels que :
a) $|z-2i|=2$; b) $|z-i|=|z+i|$

- **P2** : **Conséquences** : Les « inégalités triangulaires »
$$\big||z|-|z'|\big|\le|z+z'|\le|z|+|z'|$$
Ces deux inégalités traduisent en Géométrie le fait que, dans un triangle quelconque, la longueur de chacun des côtés est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés, et est supérieure à leur différence.

c) Propriétés du module

Pour tous complexes z et z', tout réel k, tout entier n :

- **P3** : $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$
- **P4** : $|z\times z'|=|z|\times|z'|$
- **P5** : $\left|\frac{1}{z'}\right|=\frac{1}{|z'|}$, $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$, avec z' non nul
- **P6** : $|z^n|=|z|^n$ avec n entier relatif
- **P7** : $|z|=|-z|=|\overline{z}|=|-\overline{z}|$
- **P8** : $|\mathrm{Re}\,z|\le|z|$ et $|\mathrm{Im}\,z|\le|z|$

E4 : Donner des interprétations graphiques de **P7** et **P8**.

E5 : Calculer les modules de $z_1=\left(\sqrt{6}+i\right)\left(5+i\sqrt{3}\right)$
$$z_2=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2018}\ ;\qquad z_3=\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{20}$$

E6 : Reprendre l'exercice **E2** en utilisant successivement les propriétés **P1 et P4**.

II) Ensemble U *des complexes de module* 1

a) D2 : On note **U** l 'ensemble des *nombres complexes de module 1*. Ainsi : **U** = $\{z\in\mathbf{C},|z|=1\}$

- **Remarque** : Si $a+ib$, avec a et b réels, est l'écriture algébrique d'un complexe z de **U**, alors les parties réelle et imaginaire de z vérifient $a^2+b^2=1$.

b) Propriétés

- **P9** : **Graphiquement**, les complexes de module 1 sont les affixes de points du cercle trigonométrique, de centre O et de rayon 1, d'équation $x^2+y^2=1$.
- **P10** : Si u et v sont dans **U**, alors $u\times v$ est dans **U**.
- **P11** : Si u est dans **U**, alors $\frac{1}{u}$ est aussi dans **U**.
- **P12** : u est dans **U** si et seulement si $\overline{u}=\frac{1}{u}$.
- **Remarque** : Cette propriété caractéristique de **U** est à rapprocher de celle de **R** : ($\overline{z}=z$) et de celle de i**R** : ($\overline{z}=-z$), ces trois ensembles étant les sous-ensembles de **C** les plus fréquemment utilisés.

E7 : Montrer que si les deux complexes u et v sont dans **U**, avec $1+uv$ non nul, alors $z=\frac{u+v}{1+uv}$ est réel.

c) Autre écriture d'un nombre complexe non nul

- **P13** : Pour tout complexe z non nul, $\frac{z}{|z|}$ est dans **U**.
- **Remarque :** Cette propriété peut être rapprochée du fait que si un vecteur $\vec{u}$ est non nul, le vecteur $\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ est le vecteur colinéaire à $\vec{u}$, de même sens que celui de $\vec{u}$ et de norme 1.

- **P14** : Tout nombre complexe **non nul** s'écrit, de façon unique,
$$z=r\times u$$
comme le produit d'un réel r strictement positif et d'un élément u de **U**.
On montre que $r=|z|$ et $u=\frac{z}{|z|}$.

III) Arguments d'un complexe non nul

a) Définition

- **P15** : Pour tout couple de réels $(a\,;b)$ vérifiant $a^2 + b^2 = 1$, il existe un unique réel α de $]-\pi\,;\pi]$ tel que $a = \cos\alpha$ et $b = \sin\alpha$.
- **D3** : On a vu que tout complexe $u = a + ib$, de module 1, vérifie $a^2 + b^2 = 1$. Donc il existe un unique réel α de $]-\pi\,;\pi]$ tel que $u = \cos\alpha + i\sin\alpha$.
  α s'appelle l'*argument principal* de u et *les arguments* de u sont les valeurs $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
- **P16** : **Graphiquement**, un argument α d'un nombre complexe z de **U** est une mesure de l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\right)$, appelé *angle polaire* du point M dans le repère $\mathfrak{R}$.

b) Extension à tous les complexes non nuls

- **D4 :** Pour un nombre complexe z non nul quelconque, on pose $z = |z| \times u$, avec u qui est donc de module 1.
  Puisque $|z|$ est un réel strictement positif, les points $U(u)$ et $M(z)$ sont sur la même demi-droite d'extrémité O. Ainsi, les angles $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OU}\right)$ et $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ sont égaux. On peut donc définir les arguments de z comme étant les arguments de u.

E8 : Par dessin et lecture graphique, déterminer le module et l'argument principal de : $z_1 = 3$; $z_2 = -5$; $z_3 = 2i$; $z_4 = -6i$; $z_5 = 2 + 2i$ et $z_6 = -3 + 3i$.

E9 : Déterminer par calcul le module et l'argument principal des complexes : a) $z_1 = -4\sqrt{3} + 4i\sqrt{3}$

b) $z_2 = 1 - i\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ c) $z_3 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$.

- **Remarque :** On notera $\alpha = \mathrm{Arg}(z)$ pour l'argument principal et $\arg(z)$ pour un argument quelconque. Cependant, on ne s'intéresse pas toujours à préciser l'argument principal, et on parlera habituellement d'argument « modulo 2π » ou « à $2k\pi$ près »
- **D5** : **Nouvelle écriture d'un complexe non nul**
  L'écriture $\boxed{z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)}$, où α est un argument de z, complexe non nul, s'appelle la *forme trigonométrique complexe* de z.

E10 : Déterminer la forme trigonométrique de $z_1 = 5$; $z_2 = -3$; $z_3 = 4i$; $z_4 = -6 + 6i$; $z_5 = 3 + 3\sqrt{2}\,i$;
$z_6 = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $z_7 = -2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

- **P17** : **Conversions** entre les écritures algébriques et trigonométriques complexes :
- Soit a et b deux réels et r un réel strictement positif :
  Posons $z = a + ib = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, on a :

$$a = r \times \cos\alpha \quad \text{et} \quad b = r \times \sin\alpha$$
$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \alpha \text{ tel que } \cos\alpha = \frac{a}{r}$$

c) Propriétés

- **P18** : Graphiquement, le couple $(r\,;\alpha)$, avec $r = |z|$ et $\alpha = \arg z$, s'appelle les *coordonnées polaires* du point M d'affixe z.

Les égalités « $u = v$ » avec *arg* ci-dessous sous-entendent « $u = v + 2k\pi\,, k \in \mathbf{Z}$ »

Pour tous complexes z et z' non nuls,

- **P19** : $(z = z') \Leftrightarrow (|z| = |z'| \text{ et } \arg z = \arg z')$
- **P20** : $\left(z \in \mathbf{R}_+^*\right) \Leftrightarrow (\arg z = 0)$
- **P21** : $\left(z \in \mathbf{R}_-^*\right) \Leftrightarrow (\arg z = \pi)$
- **P22** : Globalement, $\left(z \in \mathbf{R}^*\right) \Leftrightarrow (\arg z = k\pi, k \in \mathbf{Z})$
- **P23** : $(z \in i\mathbf{R} \text{ avec } \mathrm{Im}\, z > 0) \Leftrightarrow \left(\arg z = \dfrac{\pi}{2}\right)$
- **P24** : $(z \in i\mathbf{R} \text{ avec } \mathrm{Im}\, z < 0) \Leftrightarrow \left(\arg z = -\dfrac{\pi}{2}\right)$
- **P25** : Globalement,
  $\left(z \in i\mathbf{R}^*\right) \Leftrightarrow \left(\arg z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right)$
- **P26** : $\boxed{\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}}$
- **Conséquences** : Si r est un réel non nul,
  $\arg(rz) = \begin{cases} \arg(z) \text{ si } r \text{ entier strictement positif} \\ \arg(z) + \pi \text{ si } r \text{ entier strictement négatif} \end{cases}$
- **P27** : $\arg(iz) = \arg(z) + \dfrac{\pi}{2}$
- **P28** : $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$
- **P29** : $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)$
- **P30** : $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$
- **P31** : $\arg(z^n) = n \times \arg(z)$, avec n entier relatif

Rappelons que les égalités « $u = v$ » avec *arg* ci-contre sous-entendent « $u = v + 2k\pi\,, k \in \mathbf{Z}$ »

- **Remarque** : La propriété **P31** ressemble à une propriété du logarithme. On en reparlera plus loin.

E11 : Déterminer la forme algébrique des complexes :
$$z_1 = \frac{(1+i)^4}{(1-i)^6} \quad \text{et} \quad z_2 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^{10}.$$

IV) Notation exponentielle complexe

a) P32 : Si α et β sont deux réels quelconques, on a :

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha) \times (\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)$$

qui est une conséquence des propriétés **P10** et **P26**.
Or cette égalité est à rapprocher de la formule $e^u \times e^v = e^{u+v}$, avec u et v réels quelconques.
D'où l'idée de noter $\cos\alpha + i\sin\alpha$ sous la forme d'une « exponentielle complexe ».

b) Nouvelle notation et vocabulaire

- **D6 :** Si α est un réel quelconque, le complexe de module 1 valant $\cos\alpha + i\sin\alpha$ sera écrit $e^{i\alpha}$.

- La propriété **P32** aura ainsi une écriture cohérente avec la propriété de l'exponentielle « réelle » :

$$\boxed{e^{i\alpha} \times e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}}$$

- L'écriture $z = |z| \times e^{i \arg(z)}$, où z est un complexe non nul, s'appelle l'*écriture exponentielle complexe* de z.

E12 : Déterminer les écritures algébriques de :

$z_1 = e^{-i\pi}$; $z_2 = e^{2i\pi}$; $z_3 = e^{-i\frac{\pi}{2}}$; $z_4 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_5 = e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

c) Traductions des propriétés précédentes :

- Soit α et α' deux réels quelconques, et r et r' deux réels strictement positifs.
- **P33** : $\left(r\,e^{i\alpha}\right)\left(r'\,e^{i\alpha'}\right) = rr'\,e^{i(\alpha+\alpha')}$ • **P34** : $\overline{r\,e^{i\alpha}} = r\,e^{-i\alpha}$
- **P35** : $\dfrac{1}{r\,e^{i\alpha}} = \dfrac{1}{r}\,e^{-i\alpha}$ • **P36** : $\dfrac{r\,e^{i\alpha}}{r'\,e^{i\alpha'}} = \dfrac{r}{r'}\,e^{i(\alpha-\alpha')}$

E13 : Écrire sous forme exponentielle complexe :

$z_0 = 5$; $z_1 = -4$; $z_2 = 3i$; $z_3 = -i\sqrt{2}$; $z_4 = 1+i$;

$z_5 = \sqrt{3} - i$; $z_6 = z_4 \times z_5$; $z_7 = (z_4)^6$ et $z_8 = \left(\dfrac{z_4}{z_5}\right)^2$.

E14 : Placer dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $-3e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

- **P37** : Soit α un réel quelconque et n un entier relatif. On a $\left(e^{i\alpha}\right)^n = e^{ni\alpha}$, ce qui permet l'écriture suivante, appelée la *formule de De Moivre* :

$$\boxed{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha}$$

- **P38** : **Quelques cas particuliers** : $\boxed{e^{i\pi} = -1}$ et $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

E15 : On considère le nombre complexe :

$$z = \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) + i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right).$$

a) Calculer z^2.
b) Déterminer le module et un argument de z.
c) Préciser les entiers n tels que z^n est imaginaire pur.

E16 : Exprimer, grâce à la formule de De Moivre, $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

- **Conséquences** : Si $z = r\,e^{i\alpha}$, alors :

$\overline{z} = r\,e^{-i\alpha}$, $-z = r\,e^{i(\alpha+\pi)}$ et $iz = r\,e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$

- **P39** : *Formules d'Euler* (deuxième écriture) :

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}}$$

E17 : Linéariser $\cos^2(\theta)\times\sin(\theta)$ et $\cos^4(\theta)$, c'est-à-dire les écrire sous forme de sommes de $\sin(k\theta)$ ou $\cos(k\theta)$, avec k entier.

V) Utilisation géométrique des complexes

a) Interprétations du module et d'un argument du nombre complexe $\dfrac{c-a}{b-a}$

- **P40** : Soit A, B et C trois points distincts, ayant pour affixes respectives a, b et c.

  On forme alors le nombre complexe $\dfrac{c-a}{b-a}$.

  On a alors les deux interprétations suivantes :

  Son module $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right|$ vaut $\dfrac{AC}{AB}$ et ses arguments vérifient : $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + 2k\pi, k \in Z$.

  On peut alors en déduire les propriétés suivantes :

- **P41** : $\dfrac{c-a}{b-a}$ est un **réel** si et seulement si les trois points A, B et C sont **alignés**.
- **P42** : $\dfrac{c-a}{b-a}$ est un **imaginaire pur** si et seulement si le triangle (ABC) est **rectangle** en A.
- **P43** : $\dfrac{c-a}{b-a}$ est de **module 1** si et seulement si le triangle (ABC) est **isocèle** en A.
- **Remarque** : On peut associer certaines informations pour avoir des propriétés supplémentaires.

  Par exemple : $\dfrac{c-a}{b-a} = i$ si et seulement si le triangle (ABC) est rectangle isocèle direct en A,

  ou encore : $\dfrac{b-c}{a-c} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ si et seulement si le triangle (CAB) est équilatéral indirect.

E18 : a) Soit A, B et C les points d'affixes respectives

$1+i\sqrt{3}$, 2 et 2 + 4i.

Déterminer $\dfrac{BA}{BC}$ et une mesure de $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\right)$.

b) Soit D d'affixe $d = \dfrac{\sqrt{3}+i}{4}$ et E d'affixe $e = d - i$.

Montrer que le triangle (ODE) est rectangle.

b) Cas général avec quatre points distincts : $\dfrac{d-c}{b-a}$

- **P44** : Si A, B, C et D sont quatre points ($A \neq B$ et $C \neq D$), pour affixes respectives a, b, c et d, alors :

  $\dfrac{CD}{AB} = \left|\dfrac{d-c}{b-a}\right|$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\dfrac{d-c}{b-a}\right) + 2k\pi, k \in Z$

- **P45** : En particulier, $\dfrac{d-c}{b-a}$ est un réel si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
- **P46** : De même, $\dfrac{d-c}{b-a}$ est un imaginaire pur, si et seulement si (AB) et (CD) sont perpendiculaires.