EXEMPLES DE DÉNOMBREMENT : ANNONCES DU JEU DE POKER À 32 CARTES

Un jeu de trente-deux cartes est composé de quatre *familles*, qui sont *Trèfle*, *Carreau*, *Cœur* et *Pique*.

Dans chacune de ces *familles* (appelées abusivement « *couleurs* »), on a huit cartes,
qui sont *7*, *8*, *9*, *10*, *Valet*, *Dame*, *Roi* et *As* ; on les appelle des *hauteurs*.
Il y a donc quatre cartes par *hauteur*, une par *famille*.

1) ***Nombre total de « mains » de cinq cartes***

C'est le nombre de façons de choisir de façon simultanée, et donc sans ordre, 5 cartes parmi 32, soit : $\boxed{\binom{32}{5} = \mathbf{201\,376}}$

2) ***Carré*** (4 cartes de même *hauteur*, et une autre carte)

Il y a 8 *hauteurs*. Pour chaque *hauteur*, on prend les 4 cartes parmi 4 (une façon de le faire), et enfin une dernière carte parmi les 32 – 4 = 28 restantes, soit : $\boxed{\binom{8}{1}\times\binom{4}{4}\times\binom{28}{1} = \mathbf{224}}$

3) ***Full*** (3 cartes de la même *hauteur*, et 2 cartes de même *hauteur*, *hauteurs* distinctes)

Il y a 8 *hauteurs* ; on en choisit 2, ordonnées, l'une pour le *Brelan*, l'autre pour la *Paire*. Ensuite, on choisit 3 cartes parmi 4 pour le *Brelan* dans la *hauteur* considérée, et de même 2 cartes parmi 4 pour la *Paire* dans la *hauteur* considérée, soit : $\boxed{8\times 7\times\binom{4}{2}\times\binom{4}{3} = \mathbf{1\,344}}$

4) ***Brelan*** (3 cartes de la même *hauteur*, mais ni *Full* ni *Carré*)

<u>Première méthode</u> : On choisit une *hauteur* parmi 8, puis 3 cartes de cette *hauteur* parmi les 4, puis une autre carte parmi les 32 – 4 = 28 restantes, puis une dernière carte parmi les 28 – 4 = 24 restantes. Il faut, pour terminer, diviser le résultat par 2 puisque les 2 dernières cartes jouent le même rôle et on a compté en double la main « $4^e - 5^e$ » et « $5^e - 4^e$ », soit : $\boxed{\frac{1}{2}\times\binom{8}{1}\times\binom{4}{3}\times\binom{8}{1}\times\binom{24}{1} = \mathbf{10\,752}}$

<u>Deuxième méthode</u> : Comme précédemment, une *hauteur* parmi 8, puis 3 cartes parmi 4 ; puis on choisit 2 *hauteurs* parmi 8 – 1 = 7, et, dans chacune d'elles, une carte parmi 4, soit : $\boxed{\binom{8}{1}\times\binom{4}{3}\times\binom{7}{2}\times\binom{4}{1}\times\binom{4}{1} = \mathbf{10\,752}}$

<u>Troisième méthode</u> : Comme précédemment, une *hauteur* parmi 8, puis 3 cartes parmi 4 ; puis on choisit 2 cartes parmi 32 – 4 = 28 ; on retranche enfin les *Fulls*, qui sont comptés en trop, soit : $\boxed{\binom{8}{1}\times\binom{4}{3}\times\binom{28}{2} - 1\,344 = \mathbf{10\,752}}$

5) ***Double paire*** (2 *Paires*, mais ni *Full* ni *Carré*)

On choisit sans ordre 2 *hauteurs* parmi 8, puis 2 fois 2 cartes parmi 4, et enfin une carte parmi 32 – 4 – 4 , c'est-à-dire 24, soit : $\boxed{\binom{8}{2}\times\binom{4}{2}\times\binom{4}{2}\times\binom{24}{1} = \mathbf{24\,192}}$

6) ***Paire*** (2 cartes de même *hauteur*, ni *Double paire*, *Full* ou *Carré*)

Première méthode : On choisit une *hauteur* parmi 8, puis 2 cartes de cette *hauteur* parmi 4, et une 3e parmi 32 – 4 = 28, une 4e parmi 28 – 4 = 24, et une 5e carte parmi 24 – 4 = 20. Il faut, pour terminer, diviser tout par 3 !, puisqu'on a obtenu 3 ! = 6 permutations différentes des trois dernières cartes alors qu'on a en fait la même *main*, soit :

$$\boxed{\frac{1}{3!}\times\binom{8}{1}\times\binom{4}{2}\times\binom{28}{1}\times\binom{24}{1}\times\binom{20}{1}=\mathbf{107\,520}}$$

Deuxième méthode : Comme précédemment, une *hauteur* parmi 8, et 2 cartes parmi 4 ; puis on choisit 3 *hauteurs* parmi 8 – 1 = 7, et, dans chacune de ces 3 *hauteurs*, une carte parmi 4, soit :

$$\boxed{\frac{1}{3!}\times\binom{8}{1}\times\binom{4}{2}\times\binom{7}{3}\times\binom{4}{1}\times\binom{4}{1}\times\binom{4}{1}=\mathbf{107\,520}}$$

7) ***Quinte Flush*** (5 cartes consécutives de la même *famille*)

On choisit une *famille* parmi 4, puis on remarque qu'il y a 4 possibilités qui sont :

« *7 – 8 – 9 – 10 – V* », « *8 – 9 – 10 – V – D* », « *9 – 10 – V – D – R* » et « *10 – V – D – R – A* », soit : $\boxed{\binom{4}{1}\times 4=\mathbf{16}}$

8) ***Quinte*** ou ***Suite*** (5 cartes consécutives mais pas *Quinte Flush*)

Il y a 4 possibilités (voir le cas 7)), et une *famille* parmi 4 pour chaque possibilité ; on retranche ensuite les *Quintes Flush*, soit : $\boxed{4\times\binom{4}{1}^5-16=\mathbf{4\,080}}$

9) ***Couleur*** (5 cartes de la même *famille* mais pas *Quinte Flush*)

On choisit une *famille* parmi 4, puis 5 cartes de cette *famille* parmi 8 ; on retranche ensuite les *Quintes Flush*, soit :

$$\boxed{\binom{4}{1}\times\binom{8}{5}-16=\mathbf{208}}$$

———

PROBABILITÉS D'OBTENTION *(en pourcentages)*

Jeu de	**32 cartes**	
Annonces	**Cas Favorables**	**Pourcentages**
tout	201 376	100
Quinte flush	16	0,008
Couleur	208	0,103
Carré	224	0,111
Full	1 344	0,667
Suite	4 080	2,026
Brelan	10 752	5,339
Double paire	24 192	12,013
« *rien* »	53 040	26,309
Paire	107 520	53,393

Jeu de	**52 cartes**	
Annonces	**Cas favorables**	**Pourcentages**
tout	2 598 960	100
Quinte flush	40	0,002
Carré	624	0,024
Full	3 744	0,144
Couleur	5 108	0,197
Suite	10 200	0,393
Brelan	54 912	2,113
Double paire	123 552	4,754
Paire	1 098 240	42,257
« *rien* »	1 302 540	50,118

On remarquera qu'avec un jeu de 32 cartes, il est plus de deux fois plus facile d'obtenir une paire que de ne rien obtenir.
De plus, la position de l'annonce « Couleur » n'est pas la même selon le nombre de cartes.