DÉNOMBREMENT

I) Rappels et définitions

a) **Préliminaire** : Soit f une fonction de E vers F , deux ensembles fixés quelconques. Considérons l'équation : $f(x) = v$, avec v élément quelconque de F . Si cette équation a, pour tout v de F , exactement une solution dans E , alors on dit que f établit une **bijection** entre E et F .

b) **Définition** : Un ensemble E , non vide, est **fini** si et seulement si on peut établir une bijection de E vers une partie de $\mathbb{N}$ de la forme $\{1; 2; 3; \dots; n-1; n\}$. L'entier n est alors appelé le **cardinal** de E , et est noté $\text{card}(E)$ ou $|E|$.

c) **Notations ensemblistes** :

- Soit E un ensemble. On considère acquise la notion d'**appartenance** : « x appartient à E » : $x \in E$
- On dit que A est **inclus** dans E (on note $A \subset E$) si et seulement si on a : « Pour tout x de A , x appartient à E ». A est un **sous-ensemble** de E .
- Soit A et B deux sous-ensembles de E . On note $A \cap B$ (lire « A **inter** B ») l'**intersection** de A et de B définie par : « Pour tout x de E , x appartient à $A \cap B$ si et seulement si x appartient à A et à B ».
- On note $A \cup B$ (lire « A **union** B ») la **réunion** de A et de B définie par : « Pour tout x de E , x appartient à $A \cup B$ si et seulement si x appartient à A ou à B »
- **Remarque** : Le « ou » employé ici est inclusif (l'intersection de A et B est incluse dans leur réunion).
- On note $C_E A$ le **complémentaire** de A dans E (lire ainsi), définie par : « Pour tout x de E , x appartient à $C_E A$ si et seulement si x n'appartient pas à A »

Remarque : Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble de référence, (ici, c'est l'ensemble E), le complémentaire de A dans E peut être noté $\bar{A}$.

4) **Quelques propriétés** :

- a) $(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cap B = A)$ et $(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cup B = B)$
 b) Les lois de **Morgan** : (A et B dans E).

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

5) **Propriété de base sur les cardinaux** (*admise*) :

a) Soit A et B deux ensembles finis. Si A et B sont **disjoints** (c'est-à-dire d'intersection vide), alors le cardinal de leur réunion est égal à la somme de leurs cardinaux. C'est-à-dire :

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$$

b) **Conséquences** :

- Si $A \subset B$, alors $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ (utiliser la propriété de base avec le complémentaire de A).
- Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$, n ensembles deux à deux disjoints, alors le cardinal de la réunion est égal à la somme des cardinaux.

• Donc $\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{card}(A_i)$.

• Si A est un sous-ensemble de E , alors :

$$\text{card}(\bar{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$$

• $((A \subset B) \text{ et } (\text{card}(A) = \text{card}(B))) \Rightarrow (A = B)$

6) **Généralisation de la propriété de base** :

Soit A et B deux ensembles quelconques, alors on a :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

Généralisation à trois sous-ensembles :

$$\begin{aligned} \text{card}(A \cup B \cup C) &= \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) \\ &- \text{card}(A \cap B) - \text{card}(B \cap C) - \text{card}(C \cap A) + \text{card}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

7) **Produit cartésien de deux ensembles** :

a) **Définition** : Soit A et B deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de A et B , et on note $A \times B$, l'ensemble des couples $(a; b)$ tels que a appartient à A et b appartient à B .

C'est-à-dire : $A \times B = \{(a; b) / a \in A \wedge b \in B\}$.

b) **Propriété** (*admise*) justifiant la notation.

Si A et B sont deux ensembles finis, l'ensemble

$A \times B$ est fini et

$$\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B)$$

c) **Conséquences** :

- Soit $E_1, E_2, \dots, E_n$, n ensembles, alors le cardinal de leur produit cartésien est égal au produit de leurs cardinaux.
- En particulier, si tous les ensembles sont égaux à E , alors on a : $\text{card}(E^n) = (\text{card}(E))^n$, où E^n symbolise $E \times \dots \times E$, n fois.

II) Nombre de sous-ensembles d'un ensemble

1) Soit n un entier positif et soit E un ensemble fini de cardinal n . On note $s(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E (on dit aussi l'ensemble des parties de E). On cherche le cardinal de $s(E)$.

Exemples :

- si $n = 0$, $E = \emptyset = \{\}$. Alors $P(E) = \{\emptyset\} = \{\{\}\}$ donc 1 élément.
- si $n = 1$, $E = \{a\}$. Alors $P(E) = \{\emptyset, \{a\}\}$ donc 2 éléments.
- si $n = 2$, $E = \{a; b\}$. Alors $P(E) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a; b\}\}$ donc 4 éléments.
- si $n = 3$, $E = \{a; b; c\}$. Alors $P(E) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\}; \{a; b; c\}\}$ donc 8 éléments.

2) On retiendra : si E est un ensemble fini quelconque, $\text{card}(s(E)) = 2^{\text{card}(E)}$.

III) Nombre d'applications de l'ensemble E vers l'ensemble F

1) Considérons l'ensemble $E = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ et l'ensemble F . On remarque que déterminer le nombre d'applications f de E vers F revient à déterminer le nombre de p -uplets $(f(a_1); f(a_2); \dots; f(a_n))$ que l'on peut dénombrer dans F^p . Conclure.

2) **On retiendra :**

Le nombre d'applications de E vers F est égal à

$$(\text{card}(F))^{\text{card}(E)}.$$

n^p est le nombre de façons de tirer **successivement avec remise** p objets parmi n .

3) **Remarque :** Le calcul du cardinal de $s(E)$ est un cas particulier du cas présent et retrouver ce résultat.

IV) Nombre de bijections de E vers E - permutations

1) Soit n un entier. On cherche ici le nombre de bijections de E vers E . (On montre qu'il ne peut y avoir bijection de E vers F , ensembles finis, que si E et F ont même cardinal).

• Notons $E = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$. La différence fondamentale avec le nombre d'applications est qu'ici, une fois $f(a_1)$ choisi (parmi n éléments), $f(a_2)$ ne peut être égal à $f(a_1)$ et est donc choisi parmi $n - 1$ éléments. Continuer le raisonnement. Conclure. Montrer que le nombre cherché est égal à $n(n-1) \times \dots \times 2 \times 1$.

• Ce produit des n entiers de 1 à n s'appelle **factoriel** n et se note $n!$

2) **On retiendra :** Le nombre de bijections de E vers E ou encore de **permutations** de E , de cardinal n , est égal à $n!$. C'est le nombre de façons de tirer **successivement sans remise** n objets parmi n .

3) **Remarques :**

a) Exemple avec trois éléments :

$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$
$a \longrightarrow$	$b \longrightarrow$	$c \longrightarrow$
$a \longrightarrow$	$c \longrightarrow$	$b \longrightarrow$
$b \longrightarrow$	$a \longrightarrow$	$c \longrightarrow$
$b \longrightarrow$	$c \longrightarrow$	$a \longrightarrow$
$c \longrightarrow$	$a \longrightarrow$	$b \longrightarrow$
$c \longrightarrow$	$b \longrightarrow$	$a \longrightarrow$

V) Nombre d'injections de E vers F - arrangements

1) **Remarques préliminaires :**

• **Définition :** Une fonction de E vers F est dite **injective**, ou encore réalise une **injection** de E vers F si et seulement si deux éléments distincts de E ont toujours des images distinctes

• Si $p > n$, il n'existe pas d'injections de E vers F .

• Si $p = n$, on se ramène au cas précédent, car toute injection d'un ensemble fini vers lui-même est une bijection.

• Si $p < n$, la méthode de détermination est la même que précédemment.

Notons $E = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$. Si f est une injection, il y a n choix possibles pour $f(a_1)$, puis $n - 1$ choix pour $f(a_2)$, puisque $f(a_2) \neq f(a_1)$. Continuer le raisonnement.

Conclure. Montrer que le nombre cherché est égal à :

$$n(n-1) \times \dots \times (n-p+1) = \prod_{k=0}^{p-1} (n-k),$$

que l'on note : A_n^p .

2) **On retiendra :**

Le nombre d'injections de E vers F , ou encore **d'arrangements** de p éléments parmi n , est égal à

A_n^p . C'est le nombre de façons de tirer successivement sans remise p objets parmi n .

3) **Remarque :** A_n^p peut aussi s'écrire $\frac{n!}{(n-p)!}$. De plus,

on a vu que, lorsque $p = n$, on a $A_n^n = n!$. Pour rendre cette formule cohérente, on prend la convention suivante : $0! = 1$.

VI) Nombre de sous-ensembles à p éléments d'un ensemble à n éléments - combinaisons

1) **Question :** De combien de façons peut-on choisir p éléments parmi n ? (on étudie, bien sûr le problème pour p inférieur ou égal à n)

Réponse : Précédemment, on a déterminé le nombre de façons de choisir p éléments ordonnés parmi n éléments, et on a trouvé A_n^p . Ici, on ne tient plus compte de l'ordre, c'est-à-dire : si on considère les p éléments $b_1, b_2, \dots, b_p$ choisis parmi les n , ils définissent un sous-ensemble pour ce problème, mais $p!$ arrangements pour le problème précédent. Conclure.

2) **On retiendra :** Le nombre cherché est égal à $\frac{A_n^p}{p!}$,

que l'on note C_n^p (ancienne notation française), ou

encore $\binom{n}{p}$ (notation internationale). C'est le nombre de **combinaisons** de p objets parmi n objets.

3) Propriétés :

a) On a, pour $p \leq n$, $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

b) On a aussi, pour $p \leq n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ et

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

Ces deux propriétés peuvent

être démontrées grâce à la première propriété, mais elles peuvent aussi être montrées à l'aide d'un raisonnement ensembliste.

4) **Application de la propriété** $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$

Cette formule permet de déterminer la valeur d'un

« $\binom{n}{p}$ », de proche en proche, grâce aux valeurs des

« $\binom{n}{p}$ » qui le précèdent. On présente habituellement

ces calculs dans un tableau appelé **Triangle de Pascal** :

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1						0	
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

5) Application à la recherche des coefficients du binôme :

a) Cherchons le développement de $(x+1)^n$, où x est un réel et n un entier strictement positif.

$(x+1)^n$ peut être mis sous la forme :

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i. \text{ Or, } (x+1)^n = (x+1) \dots (x+1),$$

(n facteurs).

Le coefficient a_i cherché est le nombre de fois que l'on trouve x^i dans le développement. On a donc :

$$a_i = \binom{n}{i}, \text{ d'où :}$$

pour tout réel x , pour tout entier $n \geq 0$,

$$(x+1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i.$$

b) En déduire le développement de $(u+v)^n$.

Montrer que l'on obtient la **formule du binôme de Newton** :

Pour tout couple (u,v) de réels, pour tout entier n

$$\text{strictement positif, } (u+v)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} u^i v^{n-i}$$

c) Deux cas particuliers utiles :

Si $u = v = 1$, on a $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$.

Donner une démonstration ensembliste.

Si $u = 1$ et $v = -1$, on a : $\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = 0$.

6) Autres applications

a) **Formule de Leibniz** : Soit f et g deux fonctions n fois dérivables sur l'intervalle I , alors $f.g$ est n fois dérivable sur I et :

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(i)} \times g^{(n-i)} \text{ où } f^{(i)}$$

est la dérivée i -ème de f . (Par convention, $f^{(0)} = f$).

Exemple :

$$\begin{aligned} (x^2 e^x)^{(n)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} (e^x)^{(n-k)} \\ &= (x^2 + 2nx + n(n-1))e^x \end{aligned}$$

b) Parmi les $n!$ permutations, il y en a

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! \text{ qui sont totalement}$$

désordonnées, c'est-à-dire pour lesquelles, pour tout i entre 1 et n , $f(i)$ est différent de i . Ce nombre vaut

$$\text{aussi } n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

c) Le nombre d'applications non bijectives de E_n est $n^n - n!$.

d) Formule de Stirling :

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} (1 + \varepsilon(n)),$$

avec $\varepsilon(n)$ tendant vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

VII) Résumé

Nombre de façons de tirer p objets parmi n objets.

	AVEC REMISE	SANS REMISE
AVEC ORDRE	n^p	A_n^p
SANS ORDRE	?	$\binom{n}{p}$