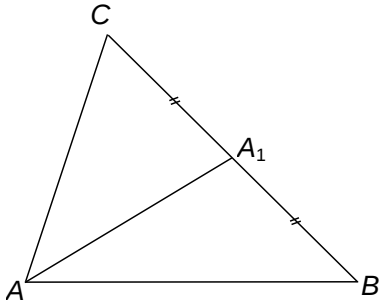


DROITES REMARQUABLES DANS UN TRIANGLE

I) Médianes

a) Définition

- Soit (ABC) un triangle.
- On note A_1 le milieu du segment $[BC]$.
- La droite (AA_1) s'appelle la médiane issue de A du triangle (ABC) .
- A_1 s'appelle alors le pied de cette médiane.



b) Propriété de concours

**Les trois médianes d'un triangle
sont concourantes.**

- Leur point de concours, noté G , s'appelle le centre de gravité du triangle.
- **c) Propriétés du point G**
- Pour déterminer G , il suffit donc de tracer deux médianes : G est leur point d'intersection.
- G est toujours à l'intérieur du triangle.

- Le point G se trouve, pour les trois médianes, **deux fois plus près** du pied de la médiane que du sommet correspondant.

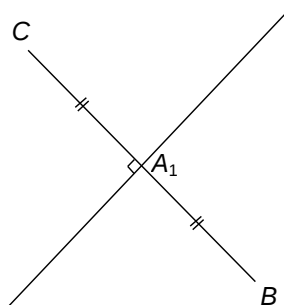
- Pour déterminer G , on peut donc, en fin de compte, ne tracer qu'une seule médiane.
- On peut donc écrire :

$$AG = 2 GA_1, \text{ ou encore } AG = \frac{2}{3} AA_1.$$

II) Médiatrices

a) Définition

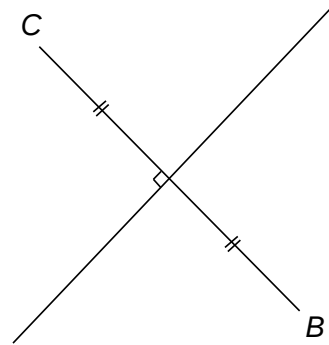
- La droite passant par le point A_1 , milieu du segment $[BC]$ et perpendiculaire à la droite (BC) s'appelle la médiatrice du segment $[BC]$.



- La médiatrice du segment $[BC]$ est l'ensemble des points équidistants (c'est-à-dire à égale distance) du point B et du point C .

Remarques : Cette médiatrice coupe le plan en deux demi-plans dont la droite est appelée la frontière.

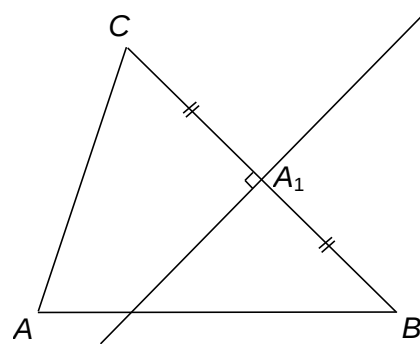
- Le demi-plan (P_1) , contenant le point B , est l'ensemble des points plus près de B que de C .
- Le demi-plan (P_2) , contenant le point C , est l'ensemble des points plus loin de C que de B .



b) Propriété de concours

**Les trois médiatrices d'un triangle
sont concourantes.**

- Leur point de concours, noté O , s'appelle le centre du cercle circonscrit du triangle.
- Tracer ci-dessous à la règle et au compas les deux autres médiatrices et placer les points B_1 , C_1 et O .



c) Propriété de O et du cercle circonscrit

- Pour déterminer O , il suffit de tracer deux médiatrices : O est leur point d'intersection.

- Le point O est le seul point du plan à égale distance des trois sommets A , B et C , c'est-à-dire le seul point M vérifiant :

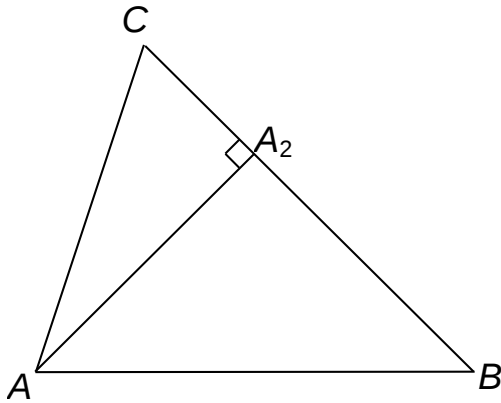
$$MA = MB = MC.$$

- Le cercle circonscrit du triangle (ABC) est le seul cercle qui passe par les trois points A , B et C (circonscrit signifie « écrit autour »).

III) Hauteurs

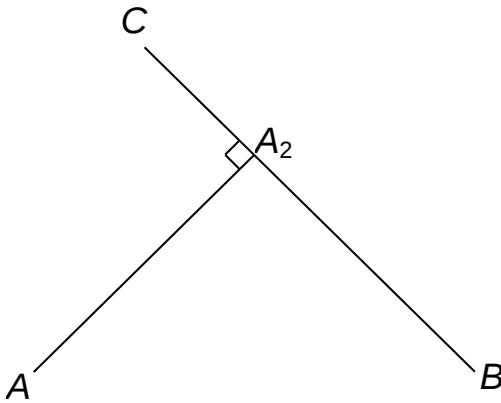
a) Définition

- La droite passant par le sommet A et perpendiculaire à la droite (BC) s'appelle la hauteur issue de A du triangle (ABC) .
- Le point A_2 de la figure ci-dessous s'appelle le pied de la hauteur issue de A .
- C'est aussi le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) .



- La hauteur issue de A est parallèle à la médiatrice du segment $[BC]$.

- La longueur AA_2 est la **plus courte distance** entre le point A et un point quelconque de la droite (BC) . On l'appelle la **distance** du point A à la droite (BC) .



b) Propriété de concours

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

- Leur point de concours, noté H , s'appelle l'orthocentre du triangle. (*ortho-* est le préfixe grec signifiant *droit*)

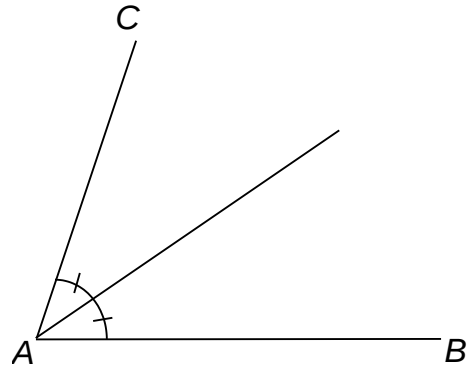
c) Propriété du point H

- Pour déterminer H , il suffit de tracer deux hauteurs : H est leur point d'intersection.
- Si le triangle est rectangle, H est alors le sommet de l'angle droit.

IV) Bissectrices (intérieures)

a) Définition

- La droite passant par le sommet A et coupant le secteur angulaire saillant BAC en deux angles de même mesure s'appelle la bissectrice intérieure issue de A du triangle (ABC) .



Rappel : La distance d'un point à une droite a été définie dans le paragraphe « Hauteurs » : c'est la **plus courte distance** du point à la droite ; c'est la distance du point au **projeté orthogonal** de ce point sur la droite.

- Cette bissectrice est l'ensemble des points équidistants (c'est-à-dire à égale distance) des droites (AB) et (AC) .
- Cette bissectrice est aussi l'axe de symétrie du secteur angulaire BAC .

b) Propriété de concours

Les trois bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes.

- Leur point de concours, noté I , s'appelle le centre du cercle inscrit du triangle.
- On note A_3 le point d'intersection de cette droite avec le côté (BC) . On l'appelle le pied de la bissectrice issue du sommet A . Le mot « intérieure » est souvent sous-entendu.

c) Propriétés de I et du cercle inscrit

- Pour déterminer I , il suffit de tracer deux bissectrices : I est leur point d'intersection.
- Le point I est toujours à l'intérieur du triangle.
- Le point I le seul point du plan à égale distance des trois côtés du triangle.
- Le cercle inscrit est le seul cercle tangent aux trois côtés du triangle (*inscrit* signifie « écrit dans »). Il est toujours à l'intérieur du triangle, comme son nom l'indique.
- Les points de contact (ou encore points de tangence) sont aussi les projetés orthogonaux de I sur ces côtés.