ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES

I) Définitions et vocabulaire

- Une équation est une égalité avec une variable que l'on cherche pour que l'égalité soit vraie.
- Cette variable s'appelle l'inconnue.
- On dit alors que l'on veut résoudre l'équation.
- Une équation, comme $3x - 2 = x + 4$, est constituée de deux membres
 - $3x - 2$ est le membre de gauche
 - $x + 4$ est le membre de droite.

II) Règles de base

- Les deux règles suivantes permettent de transformer une équation en une équation équivalente (ayant les mêmes solutions).

a) Règle n°1 : On peut ajouter (ou soustraire) le même nombre dans les deux membres :

$$a = b \text{ est équivalente à } a + c = b + c$$

b) Règle n°2 : On peut multiplier (ou diviser) par le même nombre non nul dans les deux membres : Si c est non nul,

$$a = b \text{ est équivalente à } a \times c = b \times c$$

c) But : On cherche à isoler l'inconnue, donc qu'elle reste seule dans le membre de gauche.

III) Équations du premier degré

a) Équation $x + a = b$: On utilise la règle n°1 en ajoutant $-a$ dans les deux membres et on a :

$$x = b - a, \text{ qui est la solution de l'équation.}$$

b) Équation $ax = b$ (a est non nul) : On utilise la règle n°2 en multipliant par $1/a$ (qui est non nul) dans les deux membres et on a :

$$x = b/a, \text{ qui est la solution de l'équation.}$$

c) Cas général (sur un exemple)

a	$3x - 2 = x + 4$	Équation de départ
b	$3x - 2 - x = x + 4 - x$	On soustrait x dans les deux membres
c	$2x - 2 = 4$	On réduit : $3x - x = 2x$ et $x - x = 0$
d	$2x - 2 + 2 = 4 + 2$	On ajoute 2
e	$2x = 6$	On réduit : $-2 + 2 = 0$ et $4 + 2 = 6$
f	$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$	On divise par 2
g	$x = 3$	On réduit
h	$3 \times 3 - 2 = 7$ et $3 + 4 = 7$	Vérification du résultat
i	$S = \{3\}$	Conclusion

- On est passé de **(a)** à **(c)**, puis de **(c)** à **(e)** en « *faisant passer un terme d'un membre dans l'autre membre en changeant son signe* », on appelle cela transposer.
- On pourra le faire directement, mais en gardant à l'esprit la règle de base utilisée.

IV) Mise en équation

- Certains problèmes peuvent être étudiés en se ramenant à la résolution d'une équation.
- Pour cela, on peut suivre la méthode décrite dans ces deux exemples :

Énoncé du problème	« Trouver trois nombres entiers consécutifs dont la somme vaut 171. »
Choix de l'inconnue	Notons x le plus petit des trois nombres
Traduction des autres valeurs de l'énoncé	L'entier suivant est donc $x + 1$ Le troisième est donc $x + 2$
Traduction de l'énoncé	$x + (x + 1) + (x + 2) = 171$
Résolution de l'équation	$3x + 3 = 171$ donc $3x = 168$, donc enfin $x = 56$
Vérification de la solution	$56 + 57 + 58 = 171$
Solution du problème	Les trois entiers sont 56 ; 57 et 58.

Autre exemple :

Énoncé du problème	Un dépanneur a un tarif de 20 € par heure, auquel s'ajoute 10 € de forfait-déplacement. J'ai payé 80 € en tout. Déterminer la durée de l'intervention.
Choix de l'inconnue	Notons x la durée en heure de l'intervention
Traduction des autres valeurs de l'énoncé	Comme le tarif du dépanneur est de 20 € par heure, le prix (hors déplacement) est de $20x$ €
Traduction de l'énoncé	Le prix total à payer est donc $20x + 10$, et aussi de 80 €. On a donc à résoudre l'équation $20x + 10 = 80$
Résolution de l'équation	On a donc $20x = 80 - 10$, donc $20x = 70$, donc $x = 3,5$ heures
Vérification de la solution	Si la durée est 3,5 h, le prix à payer est $20 \times 3,5 + 10$, donc 80 €
Solution du problème	L'intervention a donc duré 3 heures 30 minutes