ESPACE (Première partie)
Droites – Plans – Vecteurs

I) Droites et plans de l'espace – Rappels

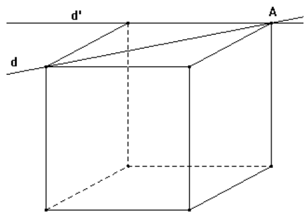
1) Règles d'incidence

- Par deux points distincts de l'espace, il passe une unique droite.
- Par trois points non alignés A, B et C de l'espace, il passe un unique plan, noté (ABC).
- Si deux points distincts A et B de l'espace appartiennent à un plan (P), alors la droite (AB) est contenue dans (P).
- Dans chaque plan de l'espace, on peut appliquer les théorèmes de géométrie plane (Pythagore, Thalès…)

2) Positions relatives de deux droites de l'espace

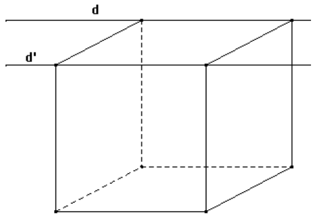
D1 : Deux droites de l'espace sont : soit *coplanaires* (incluses dans un même plan), soit *non coplanaires*. On distingue habituellement **quatre cas intéressants** :

Coplanaires



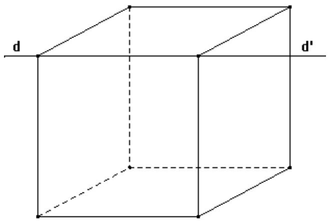
(d) et (d') sont *sécantes* en A (ou au point A)

Coplanaires



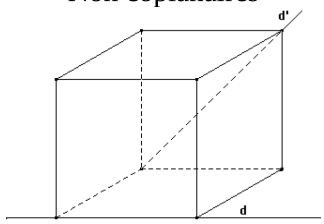
(d) et (d') sont *strictement parallèles*

Coplanaires



(d) et (d') sont *confondues*

Non coplanaires

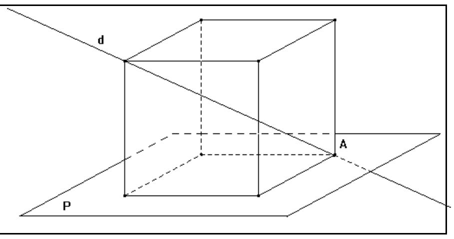


(d) et (d') n'ont aucun point commun mais ne sont pas parallèles.

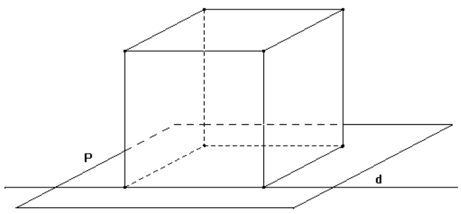
3) Positions relatives d'une droite et d'un plan

D2 : Une droite et un plan de l'espace sont : soit *sécants*, soit *parallèles*.

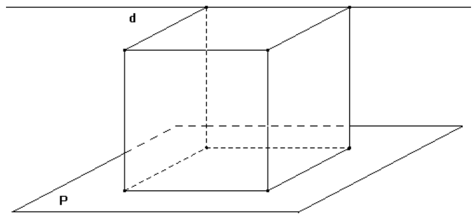
Droite et plan sécants : (d) et (P) sont *sécants* en un point : A



Droite et plan *parallèles* : deux cas.



(d) est *incluse* dans (P)



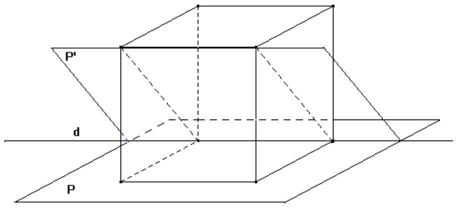
(d) et (P) sont strictement parallèles

4) Positions relatives de deux plans

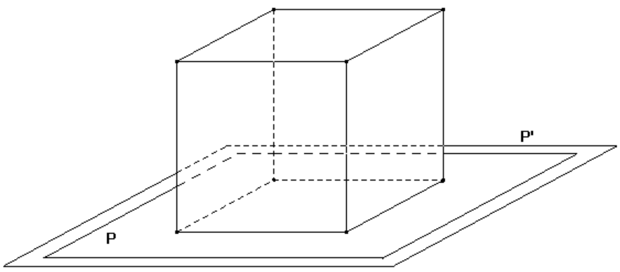
D3 : Deux plans de l'espace sont : soit *sécants*, soit *parallèles*.

Plans sécants :

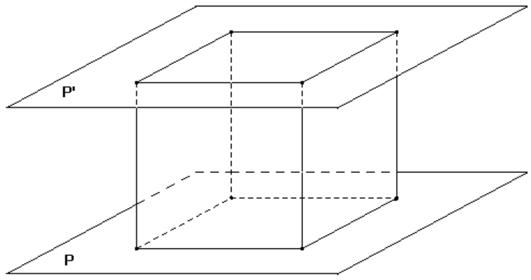
(P) et (P') sont *sécants selon la droite* d



Plans parallèles : deux cas

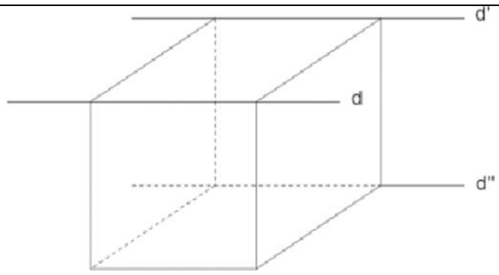


(P) et (P') sont *confondus*

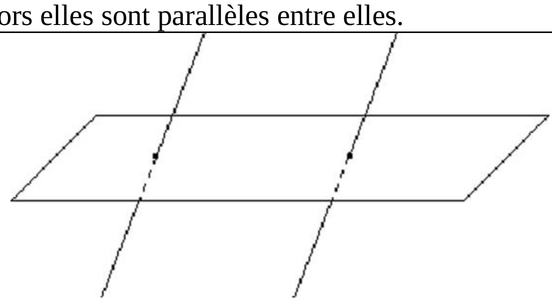


(P) et (P') sont strictement parallèles

5) Parallélisme entre droites – Propriétés

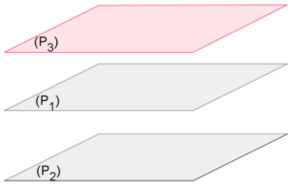


P1 : Si deux droites sont parallèles à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.

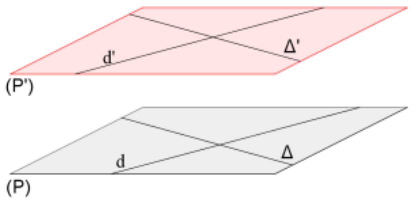


P2 : Si deux droites sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.

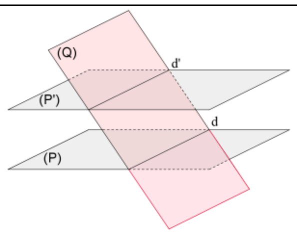
6) Parallélisme entre plans – Propriétés



P3 : Si deux plans sont parallèles à un même plan, alors ils sont tous les trois parallèles entre eux.

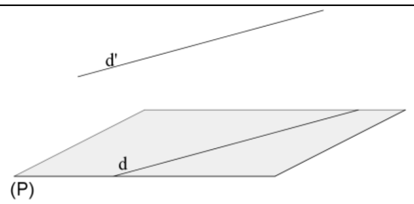


P4 : Deux plans sont parallèles si et seulement si deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre.

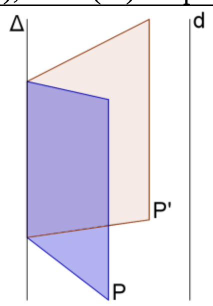


P5 : Si deux plans (P) et (P') sont parallèles, alors tout plan qui coupe (P), coupe aussi (P') et les droites d'intersection (d) et (d') sont parallèles.

7) Parallélisme entre droite et plan – Propriétés

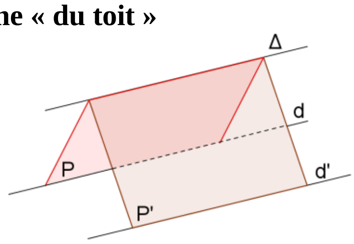


P6 : Si une droite (d') est parallèle à une droite (d) incluse dans le plan (P), alors (d') est parallèle au plan (P).



P7 : Si (P) et (P') sont deux plans sécants selon une droite (Δ) et si (d) est une droite parallèle à (P) et à (P'), alors (d) est à parallèle à (Δ).

T1 : Théorème « du toit »

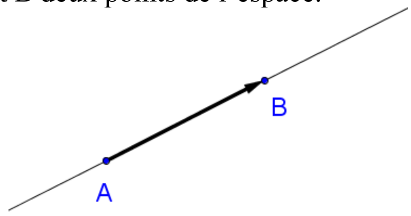


Si (d) et (d') sont deux droites parallèles, si (P) est un plan qui contient (d), si (P') est un plan qui contient (d'), et si (P) et (P') sont sécants selon une droite (Δ), alors (Δ) est parallèle à (d) et à (d').

II) Extension de la notion de vecteur

1) Vecteurs de l'espace

D4 : La notion de vecteur vue en géométrie plane se généralise à l'espace.
Soit A et B deux points de l'espace.



Si A et B sont distincts, le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

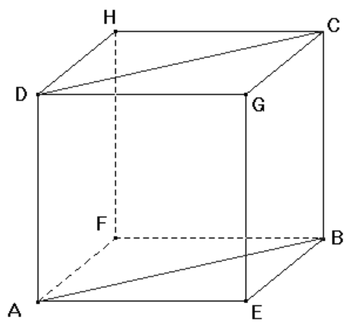
- sa direction : donnée par la droite (AB) ou toute droite parallèle à (AB),
- son sens : le sens qui va du point A vers le point B,
- sa norme : la distance AB, notée aussi $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

Si A et B sont confondus, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'appelle le *vecteur nul* et se note $\vec{0}$. Le vecteur nul n'a ni direction ni sens, et sa norme est égale à 0.

Exemple : Soit le cube ($AEBF\ DGCH$) ci-contre.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont deux représentants d'un même vecteur $\vec{u}$ car ils ont même direction, même sens et même norme ($AB = DC$).

Ainsi $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur du plan (AEB), mais aussi du plan (DGC).



Comme dans le plan, on a les propriétés suivantes :

P8 : Soit A, B, C et D quatre points distincts de l'espace.
Dire que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ équivaut à dire que le quadrilatère ($ABCD$) est un parallélogramme (Attention à l'ordre des points !).

P9 : Étant donnés un point O de l'espace et un vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique point M de l'espace tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. On dit que $\overrightarrow{OM}$ est le représentant d'origine O du vecteur $\vec{u}$.

2) Addition de deux vecteurs et multiplication d'un vecteur de l'espace par un réel

P10 : L'addition de vecteurs de l'espace est définie comme dans le plan (relation de Chasles) et vérifie les mêmes propriétés.

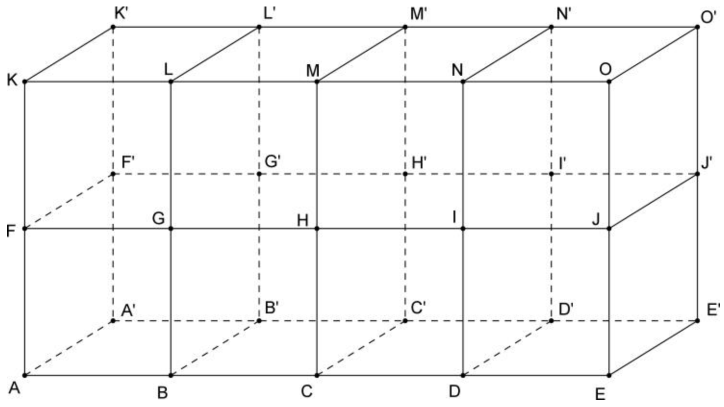
E1 : Compléter les égalités vectorielles ci-dessous avec des points du cube ($AEBF\ DGCH$) ci-dessus :

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{F...}$ $\quad$ $\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{F...}$

$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{...B}$ $\quad$ $\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{...G}$

P11 : La multiplication d'un vecteur de l'espace par un réel est définie de la même façon que dans le plan et vérifie les mêmes propriétés.

E2 : On considère les huit cubes accolés de la figure ci-dessous :



Compléter chacune des égalités suivantes en utilisant un point de la figure.

$2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{A......}$; $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{C......}$;

$3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{A......}$; $\overrightarrow{FH'}-2\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{.....D'}$;

$\overrightarrow{BI'}+\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{JO}=\overrightarrow{A....}$; $\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{GO}-\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{....O'}$

3) Vecteurs colinéaires de l'espace

D5 : On définit la colinéarité de deux vecteurs dans l'espace de la même façon que dans le plan :
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont *colinéaires* si et seulement si l'un d'eux est le produit de l'autre par un réel k.

Remarque : le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs, car pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, $0\vec{u}=\vec{0}$.

Dans l'espace comme dans le plan, on a les propriétés suivantes :
(Attention de ne pas confondre le vocabulaire !)

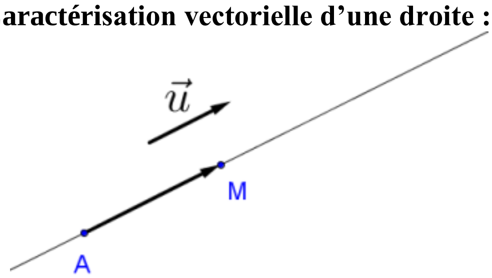
P12 : Deux **vecteurs** non nuls sont **colinéaires** si et seulement si ils ont la même direction.

P13 : Deux **droites** (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

P14 : Trois **points** A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

III) *Caractérisations vectorielles d'une droite et d'un plan*

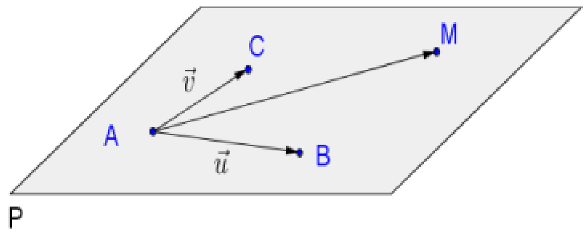
P15 : Caractérisation vectorielle d'une droite :



Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels $\overrightarrow{AM}=t\,\vec{u}$, où t est un réel quelconque, est une **droite**, notée (D).

D6 : Le vecteur $\vec{u}$ est appelé *vecteur directeur* de la droite (D).

P16 : Caractérisation vectorielle d'un plan



Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires (donc non nuls !) et A un point. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v}$ où x et y sont des nombres réels, est un **plan** (P).

D7 : Le couple $(\vec{u}\,;\vec{v})$ est appelé *couple de vecteurs directeurs non colinéaires* de (P).

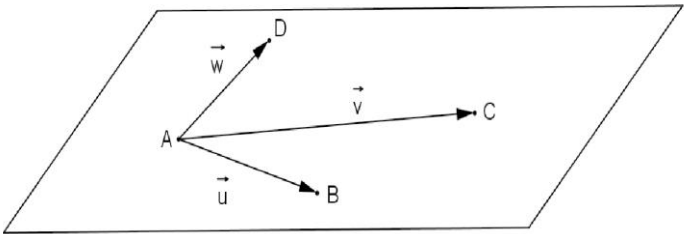
P17 : Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

P18 : Deux plans qui ont le même couple de vecteurs directeurs non colinéaires sont parallèles.

P19 : Une droite (d) est parallèle à un plan (P) si et seulement si un vecteur directeur de (d) est un vecteur du plan (P).

IV) *Vecteurs coplanaires de l'espace*

D8 : Soit un point A et trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace ; soit B, C et D les points tels que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{AD}=\vec{w}$. On dit que les trois vecteurs sont *coplanaires* si et seulement si les points A, B, C et D appartiennent à un même plan.



P20 : Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont colinéaires, alors les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires quel que soit le vecteur $\vec{w}$ de l'espace : en effet les points A, B et C étant alors alignés (ou même confondus), les points A, B, C et D appartiennent à un même plan.

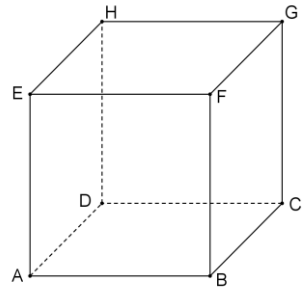
P21 : Lorsque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, pour prouver que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, il suffit de prouver que le point D appartient au plan (ABC).

T2 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. Pour tout vecteur $\vec{w}$ de l'espace : les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels α et β tels que $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$.

D9 : On dit dans ce cas que le vecteur $\vec{w}$ est une *combinaison linéaire* des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

P22 : Si trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires, alors aucun des trois vecteurs ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des deux autres vecteurs.

E3 : Soit le cube (*ABCD EFGH*) ci-contre.



1) Les vecteurs suivants sont-ils coplanaires ?

a) $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{BF}$

b) $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BH}$

c) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EG}$

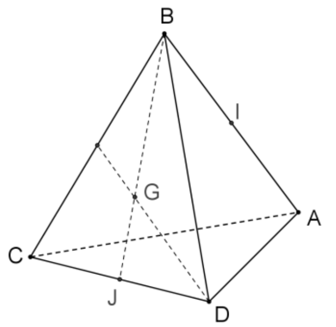
2) On note *I* le milieu de [*FG*], *R* le point tel que $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et *S* le point tel que $\overrightarrow{BS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

a) Prouver que les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{EI}$ sont colinéaires.

b) Que peut-on en déduire pour les points *R*, *S*, *E* et *I* et pour les vecteurs $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{ES}$?

3) Construire le milieu *J* de [*EB*], puis prouver que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires.

E4 : (*ABCD*) est le tétraèdre ci-contre. *I* et *J* sont les milieux respectifs des arêtes [*AB*] et [*CD*]. *G* est le centre de gravité du triangle (*BCD*).
Démontrer que les points *A*, *G*, *I* et *J* sont coplanaires.



V) *Repérage dans l'espace*

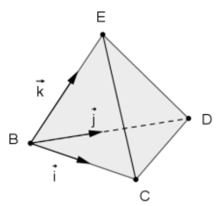
1) Définition

D10 : Un repère de l'espace est un quadruplet $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ constitué d'un point *O* (appelé <u>*origine du repère*</u>) et de trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ non coplanaires de l'espace. La droite (*O* ; $\vec{i}$) est appelée l'<u>*axe des abscisses*</u>, la droite (*O*, $\vec{j}$) l'<u>*axe des ordonnées*</u> et la droite (*O*, $\vec{k}$) l'<u>*axe des cotes*</u> du repère.

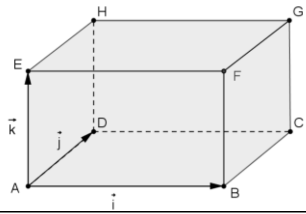
Cas particuliers : Notons *I*, *J* et *K* les points de l'espace tels que : $\overrightarrow{OI} = \vec{i}, \overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$.
Si les droites (*OI*), (*OJ*) et (*OK*) sont deux à deux perpendiculaires, on dit que le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est <u>*orthogonal*</u>. Si de plus, *OI* = *OJ* = *OK*, on dit qu'il est <u>*orthonormé*</u> (ou <u>*orthonormal*</u>).

Exemples :

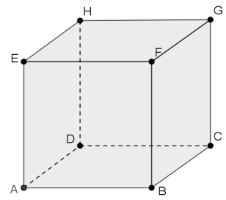
(*ABCD*) est un tétraèdre.
$\left(B;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est un repère quelconque de l'espace.



(*ABCD EFGH*) est un pavé droit.
$\left(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est un repère orthogonal de l'espace.

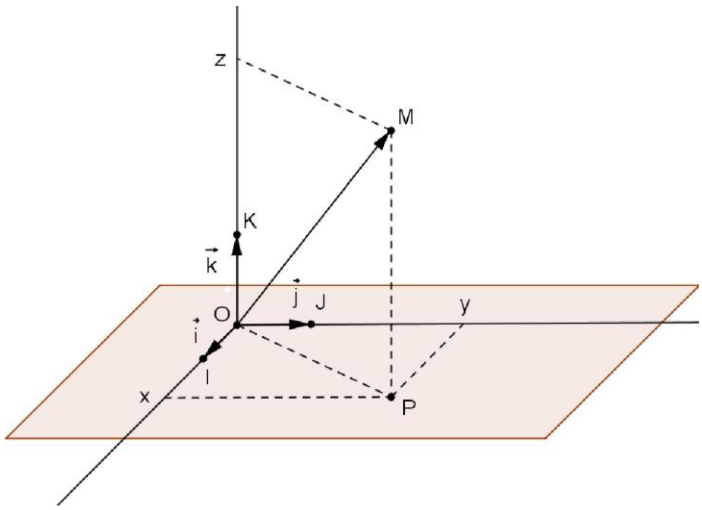


(*ABCD EFGH*) est un cube.
$\left(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace.

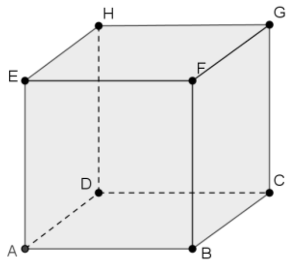


2) Coordonnées de points et de vecteurs.

T3 : Soit $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère de l'espace. Pour tout point *M* de l'espace, il existe un unique triplet (*x* ; *y* ; *z*) de réels, tel que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
(*x* ; *y* ; *z*) sont appelées les <u>*coordonnées*</u> du point *M* dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$: *x* est l'<u>*abscisse*</u> du point *M*, *y* est l'<u>*ordonnée*</u> de *M* et *z* est la <u>*cote*</u> de *M* dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$; pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet (*x* ; *y* ; *z*) de réels tel que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. (*x* ; *y* ; *z*) sont appelées les <u>*coordonnées*</u> du vecteur dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$: *x* est l'<u>*abscisse*</u> du vecteur $\vec{u}$, *y* est l'<u>*ordonnée*</u> de $\vec{u}$ et *z* est la <u>*cote*</u> de $\vec{u}$, dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.



E5 : Soit (*ABCD EFGH*) le cube ci-contre.
a) Expliquer pourquoi $\left(G;\overrightarrow{GC},\overrightarrow{GF},\overrightarrow{GH}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace.



b) Dans ce repère, donner les coordonnées des sommets de ce cube, celles du vecteur $\overrightarrow{GA}$ et celles du point *M* tel que : $\overrightarrow{GM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GA}$.

3) Calculs dans un repère de l'espace.

Remarque : *Les coordonnées de vecteurs sont habituellement notées **sous forme verticale**, mais ici, pour des raisons de mise en page, on les écrira sous forme horizontale.*

En utilisant le théorème précédent, on établit les propriétés suivantes :

Propriétés : Soit $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$ un repère de l'espace.

Pour tous vecteurs $\vec{u}\left(x\,;y\,;z\right)$ et $\vec{v}\left(x'\,;y'\,;z'\right)$ et réel *k*,

P23 : $\vec{u}=\vec{v} \iff x=x'\,,\ y=y'$ et $z=z'$

P24 : $\vec{u}+\vec{v}\left(x+x'\,;y+y'\,;z+z'\right)$ et $k\vec{u}\left(kx\,;ky\,;kz\right)$

Quels que soient les points *A*, *B* et *C*, on a :

P25 : $\boxed{\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A\,;y_B-y_A:z_B-z_A\right)}$

P26 : Le ***milieu I*** de [*AB*] a pour coordonnées :

$$\boxed{\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\,;\frac{z_A+z_B}{2}\right)}.$$

P27 : Le ***centre de gravité G*** du triangle (*ABC*) a pour coordonnées :

$$\boxed{\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\,;\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\,;\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)}.$$

P28 : Deux vecteurs de l'espace sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

4) Représentations paramétriques d'une droite

P29 : Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$, soit un point $A(x_A;\,y_A;z_A)$ et un vecteur non nul $\vec{u}\left(a\,;b\,;c\right)$. Un point *M*(*x* ; *y* ; *z*) appartient à la droite (*D*) de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par *A* si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, i.e. s'il existe un réel *t* tel que $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$,

i.e. s'il existe un réel *t* tel que : $\begin{cases} x=x_A+at \\ y=y_A+bt \\ z=z_A+ct \end{cases}$

D11 : Le système $\boxed{\begin{cases} x=x_A+at \\ y=y_A+bt\,,\ t\in\mathbf{R} \\ z=z_A+ct \end{cases}}$ est appelé <u>*représentation paramétrique*</u> de la droite (*D*).

E6 : a) Donner une représentation paramétrique de la droite (*AB*) si *A*(–1 ; 2 ; 3) et *B*(–3 ; 0 ; 4).

b) Déterminer les coordonnées d'un point *H* et les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (*D*) ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=-3+3t \\ y=2-4t\ ,\ t\in\mathbf{R} \\ z=5-2t \end{cases}$$

c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (*D'*) passant par le point *K*(1 ; – 3 ; 2) et parallèle à la droite (*D*).

5) Étude de la position relative de deux droites grâce à leurs représentations paramétriques

On a vu au début du chapitre qu'il y avait quatre possibilités : **confondues**, **non coplanaires**, **sécantes** et **strictement parallèles**.

Pour déterminer la bonne réponse, on peut raisonner de plusieurs façons. En voici deux :

a) On étudie si les droites sont **parallèles** en comparant leurs vecteurs directeurs respectifs.

- Si ces vecteurs sont **colinéaires**, on choisit un **point** quelconque de l'une des droites et on regarde s'il est aussi sur l'autre droite.
  - ✓ Si c'est le cas, alors les droites sont **confondues**
  - ✓ Sinon, elles sont **strictement parallèles**
- Sinon, on « **égale** » les deux systèmes et on cherche si le système de trois équations à deux inconnues admet ou non une **unique solution**.
  - ✓ Si c'est le cas, alors les droites sont **sécantes**
  - ✓ Sinon, elles sont **non coplanaires**

b) On peut aussi d'abord **égaler les deux systèmes** :

- S'il y a une **infinité** de solutions pour les deux paramètres, alors les droites sont **confondues**
- S'il y a une **unique** solution, elles sont **sécantes**
- S'ils n'y a **pas de solutions**, elles sont **strictement parallèles** ou bien **non coplanaires** et alors on regarde si leurs vecteurs directeurs respectifs sont ou non colinéaires.

E7 : Déterminer les positions relatives respectives des couples de droites suivantes :

a) $(D_1):\begin{cases} x=1+2t \\ y=9-3t\,,\,t\in\mathbf{R} \\ z=-9+4t \end{cases}$ $(D_2):\begin{cases} x=8+3u \\ y=5+2u\,,\,u\in\mathbf{R} \\ z=-2-u \end{cases}$

b) $(D_1):\begin{cases} x=1-4t \\ y=2+2t\,,\,t\in\mathbf{R} \\ z=4+6t \end{cases}$ $(D_2):\begin{cases} x=5+6u \\ y=3-3u\,,\,u\in\mathbf{R} \\ z=2-9u \end{cases}$

c) $(D_1):\begin{cases} x=2+3t \\ y=4-t\,,\,t\in\mathbf{R} \\ z=5-2t \end{cases}$ $(D_2):\begin{cases} x=-1+4u \\ y=2-2u\,,\,u\in\mathbf{R} \\ z=6+3u \end{cases}$

d) $(D_1):\begin{cases} x=2+3t \\ y=-3-2t\,,\,t\in\mathbf{R} \\ z=1+t \end{cases}$ $(D_2):\begin{cases} x=-4-6u \\ y=1+4u\,,\,u\in\mathbf{R} \\ z=-1-2u \end{cases}$

6) Représentations paramétriques d'un plan

P30 : Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$, soit un point $A(x_A;\,y_A;z_A)$ et deux vecteurs non nuls non colinéaires $\vec{u}\left(a\,;b\,;c\right)$ et $\vec{v}\left(a'\,;b'\,;c'\right)$. Un point *M*(*x* ; *y* ; *z*) appartient au plan (*P*) de couple de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ passant par *A* si et seulement si il existe un couple de réels (*t* ; *u*) tel que :

$$\begin{cases} x=x_A+at+a't' \\ y=y_A+bt+b't' \\ z=z_A+ct+c't' \end{cases}$$

D12 : Ce système est de même appelé <u>*représentation paramétrique*</u> du plan (*P*). On ajoute habituellement « $(t\,;t')\in\mathbf{R}^2$ » à droite du système.

E8 : Donner une représentation paramétrique du plan (*ABC*) si *A*(–1 ; 2 ; 3), *B*(–3 ; 0 ; 4) et *C*(5 ; –2 ; 1).