ESPACE *(Deuxième partie)*
Produit scalaire, orthogonalité et équations de plans

I) Rappels sur le produit scalaire dans le plan

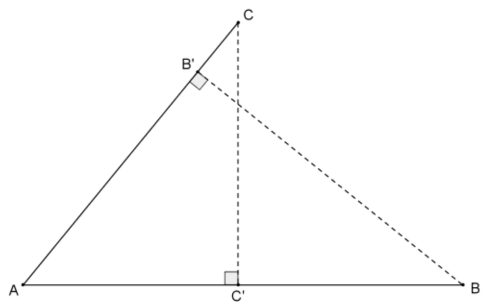
1) Définitions

D1 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
Si l'un des vecteurs est nul, alors le produit scalaire $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ est nul. Si ces deux vecteurs sont non nuls, le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le **réel** :

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = AB \times AC \times \cos\left(B\hat{A}C\right) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

P1 : Si le point *C'* est le projeté orthogonal de *C* sur (*AB*) et si *B'* est le projeté orthogonal de *B* sur (*AC*), on a :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC'} \text{ et } \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB'}\,.\,\overrightarrow{AC}}$$



E1 : Soit (*ABCD*) un carré de centre *O* et *I* le milieu de [*AB*]. On pose *AB* = 1 cm. Déterminer les réels :

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{DO},$$
$$\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{BD},\ \overrightarrow{OI}\,.\,\overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{AO}\,.\,\overrightarrow{BC}$$

E2 : Soit (*ABC*) un triangle équilatéral de côté *a* et *I* le milieu de [*BC*].
Exprimer, en fonction de *a*, les produits scalaires :

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{AI} \text{ et } \overrightarrow{IA}\,.\,\overrightarrow{BC}$$

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et *k* un réel,

P2 : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$

P3 : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$

P4 : $k(\vec{u}\,.\,\vec{v}) = (k\,\vec{u})\,.\,\vec{v} = \vec{u}\,.\,(k\,\vec{v})$

P5 : $\vec{u}\,.\,(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}\,.\,\vec{v}) + (\vec{u}\,.\,\vec{w})$

P6 : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\,.\,\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

P7 : $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u}\,.\,\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

P8 : $(\vec{u}+\vec{v})\,.\,(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

E3 : ***Théorèmes de la médiane*** :
Soit *A* et *B* deux points du plan et *I* le milieu du segment [*AB*].

a) Montrer que pour tout point *M* du plan :

$$MA^2 - MB^2 = 2\,\overrightarrow{MI}\,.\,\overrightarrow{BA} \text{ et } \overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$$

b) Traduire géométriquement la nullité de chaque membre des égalités et en déduire des propriétés connues concernant certains triangles.

2) Dans un repère orthonormal du plan

P9 : Dans un repère **orthonormal** $\left(O\,;\,\vec{i}, \vec{j}\right)$, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives (*x* ; *y*) et (*x'* ; *y'*), alors $\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

P10 : $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \dfrac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2} \times \sqrt{x'^2+y'^2}}$

E4 : Soit *ABC* un triangle isocèle rectangle en *A*.
Soit *I* et *J* les points définis par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et *K* le milieu de [*IC*]. Démontrer que les droites (*AK*) et (*JB*) sont perpendiculaires.

P11 : Un rappel utile (Formule d'Al-Kashi)
Soit (*ABC*) un triangle. Si on note *a*, *b* et *c* les longueurs respectives de [*BC*], [*AC*] et [*AB*], alors :

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)}$$

ou encore $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\hat{A}$
Ainsi que deux autres formules, obtenues par permutation circulaire de *A*, *B* et *C*.

II) Produit scalaire dans l'espace

1) Définitions

D2 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace. Il existe au moins un plan (*P*) dirigé par ces vecteurs.
On définit alors le produit scalaire $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ dans le plan (*P*). On admettra qu'il est indépendant du plan choisi.

P12 : Les propriétés du paragraphe ***I)***, de **P1** à **P11** restent valables dans l'espace.

E5 : (*ABCD*) est un tétraèdre régulier d'arête *a*.
Soit *J* le milieu de [*BC*] et *K* celui de [*AD*].
Calculer $\overrightarrow{CB}\,.\,\overrightarrow{AD}$, puis $\overrightarrow{AJ}\,.\,\overrightarrow{CK}$ en fonction de *a*.

2) Dans un repère orthonormal de l'espace

Dans tout ce paragraphe, $\left(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ désigne un repère orthonormal de l'espace.

Les coordonnées de vecteurs sont habituellement notées ***sous forme verticale****, mais ici, pour des raisons de mise en page, on les écrira sous forme horizontale.*

P13 : Si $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$ sont deux vecteurs de l'espace, alors :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'} \quad \text{et} \quad \boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

P14 : Si $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$ sont deux points de l'espace, alors :

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2 + (y_B-y_A)^2 + (z_B-z_A)^2}}$$

E6 : Soit *A*(1 ; 1 ; 1), *B*(2 ; 0 ; –2) et *C*(1 ; –2 ; 2).

a) Montrer que le triangle (*ABC*) est un triangle rectangle.

b) Est-il isocèle ?

c) Déterminer une mesure des angles $A\hat{B}C$ et $A\hat{C}B$.

E7 : a) Déterminer un vecteur $\vec{w}$ non nul, orthogonal simultanément aux vecteurs $\vec{u}$, de coordonnées 1 ; 0 et 5, et $\vec{v}$, de coordonnées –1 ; 1 et 2.

b) Déterminer les vecteurs unitaires (*i.e.* de norme 1) vérifiant cette propriété.

III) Orthogonalité dans l'espace

D3 : Deux droites de l'espace sont dites *orthogonales* lorsque leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

D4 : Deux droites de l'espace sont dites *perpendiculaires* lorsqu'elles sont orthogonales et coplanaires.

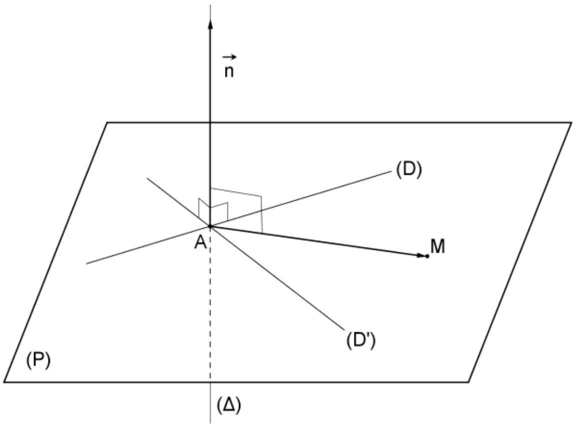
P15 : Si deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

E8 : Les droites (*D*) et (*D'*) sont-elles orthogonales ? Sont-elles perpendiculaires ?

$$(D) : \begin{cases} x = t \\ y = t+4 \\ z = 2t-5 \end{cases},\ t \in \mathbf{R} \quad \text{et} \quad (D') : \begin{cases} x = u-1 \\ y = -3u \\ z = u+3 \end{cases},\ u \in \mathbf{R}$$

IV) Équations de plans

Rappel : Une droite (Δ) est *perpendiculaire* (on dit aussi *orthogonale*) à un plan (*P*) si et seulement si elle est orthogonale à au moins deux droites sécantes, (*D*) et (*D'*), incluses dans ce plan.



D5 : Soit (*P*) un plan de l'espace.
On appelle *vecteur normal* $\vec{n}$ à (*P*) tout vecteur directeur d'une droite (Δ) perpendiculaire à (*P*).

E9 : Soit *A*(5 ; –5 ; 3), *B*(–1 ; –2 ; –1) et *C*(8 ; 5 ; 6)

a) Montrer que *A*, *B* et *C* déterminent un plan de l'espace.

b) Déterminer un vecteur normal au plan (*ABC*).

P16 : Soit (*P*) un plan contenant *A*. Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à (*P*). Soit *M* un point de l'espace.
Alors : $M \in (P)$ équivaut à $\boxed{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0}$

P17 : Soit *a*, *b* et *c* trois réels *non tous nuls* (c'est-à-dire $(a ; b ; c) \neq (0 ; 0 ; 0)$). Le plan (*P*) passant par $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a ; b ; c)$ a une équation du type $\boxed{ax + by + cz + d = 0}$.
Cette équation (non unique) est appelée une *équation cartésienne* de (*P*).

P18 (***Réciproque***) : Si *a*, *b*, *c* et *d* sont quatre réels (*a*, *b* et *c* étant non tous nuls), alors l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ de l'espace vérifiant $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a ; b ; c)$.

E10 : Déterminer une équation du plan (*ABC*) de l'exercice précédent.

E11 (***Récapitulatif***) **:** Soit (*D*) et (*D'*) deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$, et (*P*) et (*P'*) deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}\,'$.
Caractériser grâce aux vecteurs le parallélisme et l'orthogonalité des droites et des plans.

E12 : Donner un point et un vecteur normal des plans d'équations : (*P*) : $2x - 6y + 2z - 7 = 0$;
(*P'*) : $2z - y = 0$ et (P'') : $x = 5 - 3z$.

E13 : Soit *a* un réel fixé. Soit la droite (*D*) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-3t \\ z = 3+4t \end{cases},\ t \in \mathbf{R}$

et le plan (*P*) d'équation cartésienne $x + ay + 2z = 9$.

a) Déterminer *a* pour que (*D*) soit parallèle à (*P*).
(*D*) est-elle incluse dans (*P*) ?

b) Déterminer *a* pour que (*D*) soit perpendiculaire à (*P*).

E14 : Déterminer et caractériser l'intersection des plans (*P*) et (*P'*) d'équations respectives :

$$x - 3y + 2z = 5 \text{ et } 2x + y + 7z = 1.$$

E15 : Déterminer l'intersection des trois plans d'équations respectives $x - 2y + z - 1 = 0$;
$2x + y - 3z + 4 = 0$ et $x - 3y + z = 2$.

D6 : Si *A* et *B* sont deux points distincts de l'espace.
On appelle *plan médiateur* du **segment** [*AB*] le plan passant par *I* milieu de [*AB*] et perpendiculaire à (*AB*).

E16 : Déterminer une équation du plan médiateur du segment [*AB*] où *A*(0 ; 1 ; 2) et *B*(–1 ; 0 ; 1).

P19 : Le plan médiateur de [*AB*] est l'ensemble des points *M* de l'espace vérifiant *MA* = *MB*.

E17 : Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur de [*CD*] tel que *C*(1 ; 2 ; 3) et *D*(0 ; 1 ; 2).

E18 : Soit *m* un réel fixé. Montrer que l'équation :

$$mx + (m + 1)y + z - 1 = 0$$

est l'équation d'un plan (*P*) perpendiculaire au plan (*P'*) d'équation : $x - y + z = 0$ et passant par le point *A*(1 ; –1 ; 2).

E19 : Soit *a* un réel fixé. Soit les plans d'équations respectives $-4x + 2y + az = 5$ et $ax - 3y - 9z = -11$.

a) Déterminer *a* pour que les deux plans soient parallèles.

b) Déterminer *a* pour que les deux plans soient perpendiculaires.