FONCTION EXPONENTIELLE

I) Définition de la fonction exponentielle

Théorème T1 (admis) :

Il existe une fonction f dérivable sur $\mathbf{R}$, égale à sa dérivée (donc $f' = f$) et telle que et telle que $f(0) = 1$. Elle est notée exp et appelée fonction exponentielle.

II) Propriétés de la fonction exponentielle

P1 : Pour tout x réel, $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$.

P2 : Pour tout réel x , $\exp(x) \neq 0$.

P3 : Pour tout réel a , $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$.

P4 : La fonction $\exp$ est unique.

P5 : Pour tous réels a et b ,

$$\boxed{\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)}$$

P6 : Pour tous réels a et b , $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

P7 : Pour tout réel a et pour tout entier relatif n ,

$$\exp(n \times a) = (\exp(a))^n$$

Notation : On a vu que pour tout entier relatif n ,

$$\exp(n) = \exp(1 \times n) = (\exp(1))^n$$

On note e le nombre $\exp(1)$. On a : $e \approx 2,718$.

Alors, pour tout entier relatif n , on a : $\exp(n) = e^n$.

On convient d'étendre la notation pour tous les réels. Ainsi, pour tout x réel, $\exp(x)$ est noté e^x .

Les propriétés précédentes s'écrivent alors :

Pour tous réels a et b et pour tout entier relatif n ,

$e^{a+b} = e^a \times e^b$	$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$	$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$	$(e^a)^n = e^{na}$
----------------------------	--------------------------	-----------------------------	--------------------

E1 : Exprimer en fonction de e , $A = \exp(7) \times \exp(-4)$;

$$B = \frac{\exp(2,8)}{\exp(0,8)} ; C = \exp(2 - \sqrt{2}) \times \exp(2 + \sqrt{2}).$$

E2 : Simplifier $D = e \times e^5 \times e^{-3}$ $E = \frac{e^3 \times e^{-2}}{e^4}$

$$F = \frac{(e^{-1})^3 \times e^2}{e^{-4}} \quad G(x) = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$$

$$H = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + 1} \quad I = \frac{e^{-x}}{e^x} + \frac{e^{2x} - e^{-3x}}{e^{-x}} - e^{3x}$$

III) Étude de la fonction exponentielle

P8 : La fonction $\exp$ est strictement positive sur $\mathbf{R}$.

E3 : Montrer que $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ et simplifier :

$$H = \sqrt{e} \times e^2, I = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{e}} \text{ puis } J = \sqrt{e^{-4} \times \sqrt{e}}.$$

P9 : Variations : La fonction $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

Conséquence : Soit a et b deux réels.

$$(e^a = e^b) \Leftrightarrow (a = b) \quad \text{et} \quad (e^a < e^b) \Leftrightarrow (a < b)$$

E4 : Étudier les variations des fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{e^x}{x} ; g(x) = (2-x)e^x ; h(x) = 2e^x - e^{2x} + \frac{e^2}{4}$$

E5 : Résoudre dans $\mathbf{R}$: a) $e^{3x+1} = 1$ b) $e^{-x^2} = e^{2x+1}$

$$\text{c) } e^{x-3} \geq \frac{1}{e^x} \quad \text{d) } e^{2x} + e^x - 2 = 0$$

IV) Problème réciproque

P15 : Résolution de l'équation $\exp x = k$, où k est un réel donné : Pour tout réel k strictement positif, l'équation $\exp x = k$ a une unique solution dans $\mathbf{R}$.

On dit que la fonction $\exp$ réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $]0; +\infty[$ (ou encore qu'elle est bijective).

Pour tout réel $k > 0$, l'unique solution de l'équation $\exp x = k$ est noté $\ln(k)$.

La fonction $\ln$, réciproque de $\exp$, est appelée fonction logarithme népérien, et sera étudiée plus précisément dans un futur chapitre.

E6 : Résoudre dans $\mathbf{R}$: a) $e^x = 4$ b) $e^x = -2$

$$\text{c) } e^{2x-1} = 2e^x \quad \text{d) } e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$$

$$\text{e) } e^x - 6e^{-x} - 1 = 0 \quad \text{f) } e^{2x+1} - e^{-2x} = e - 1$$

$$\text{g) } e^{x^2-4} = (e^{2x+3})^2 \quad \text{h) } 2e^{3x+6} = 3e^{-2x+4}$$

$$\text{i) } \begin{cases} e^x + e^y = 5 \\ 2e^x - 3e^y = -5 \end{cases} \quad \text{j) } \begin{cases} e^x + e^y = 7 \\ e^{x+y} = 10 \end{cases}$$

E7 : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = e$ et,

$$\text{pour tout } n \text{ positif, } u_{n+2} = \frac{(u_{n+1})^2}{u_n}.$$

a) Justifier que la suite (u_n) est infinie.

b) Déterminer une écriture explicite de u_n .

c) On pose, pour tout entier n positif, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Donner une écriture explicite de S_n