FIGURES ET NOMBRES CONSTRUCTIBLES

I) Figures constructibles

1) Définition

Un point, une droite ou un cercle, est dit ***constructible à la règle et au compas*** (on dira plus simplement ***constructible***) lorsqu'on peut l'obtenir en suivant un nombre fini de fois les règles de constructions suivantes.

2) Règles de constructions

On peut tracer :

- un point quelconque dans le plan
- une droite passant par deux points déjà tracés
- un cercle de centre un point déjà tracé et de rayon la distance de deux points déjà tracés

3) Constructions de base

a) Tracer la perpendiculaire à une droite (définie par deux de ses points construits) et passant par un point construit.

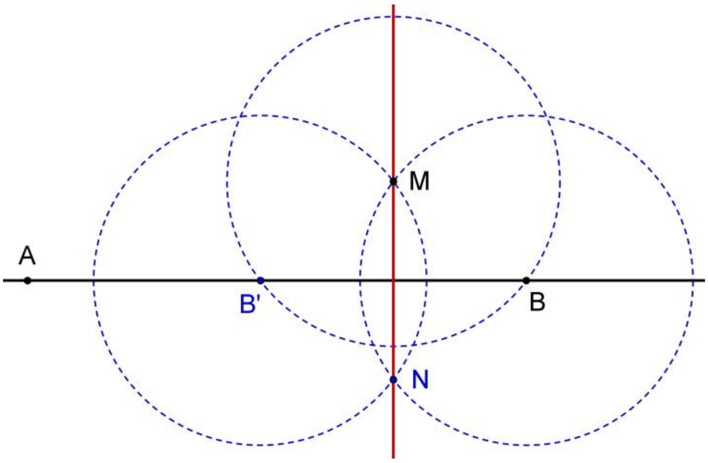
Données en noir, constructions intermédiaires en bleu, solution en rouge

Construction n°1 : La droite (D) est (AB), le point est M.

1. On trace le cercle de centre M passant par exemple par B (ou encore par A),
2. Ce cercle recoupe (D) en B',
3. On trace les cercles de centres respectifs B et B' passant par M,
4. Ils se recoupent en N,
5. La perpendiculaire cherchée est la droite (MN).

Remarque : l'expression « recoupe » signifie qu'il y a déjà une intersection connue, et qu'on définit un deuxième point.

Propriété utilisée : On a $MB = MB'$, $BM = BN$ et $B'M = B'N$ donc le quadrilatère ($MBNB'$) est un losange. Or on sait que les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.

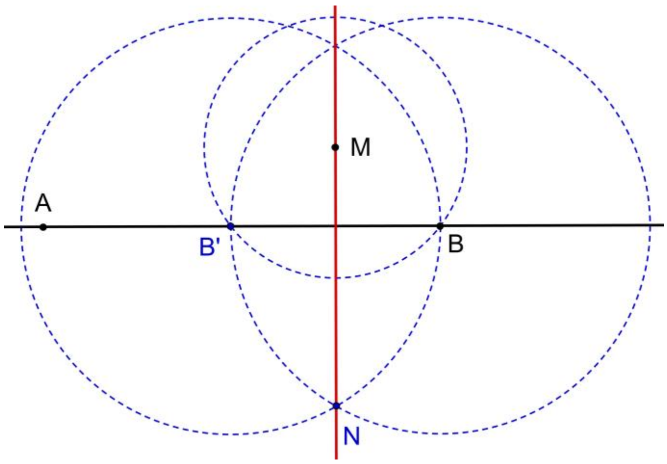


Construction n°2 : Mêmes hypothèses.

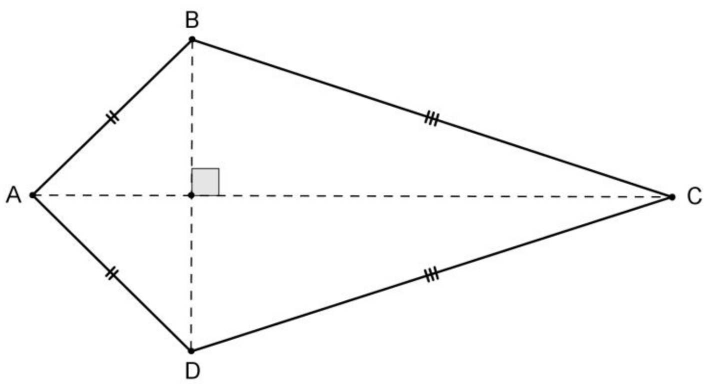
1. Les étapes 1. et 2. de la première méthode sont inchangées
2. On trace le cercle de centre B passant par B',
3. On trace le cercle de centre B' passant par B,
4. Ils se coupent en deux points, dont l'un est N,
5. La perpendiculaire cherchée est la droite (MN).

Remarque : Si on note N' l'autre point d'intersection des cercles, il s'agit de la droite (NN').

Propriété utilisée : On a $MB = MB'$ et $BB' = BN = B'N$ donc les triangles (MBB') et (NBB') sont isocèles respectivement en M et N (le 2^{e} est même équilatéral) donc ($MBNB'$) est un cerf-volant. Or on sait que les diagonales d'un cerf-volant sont perpendiculaires.



Rappel : Un <u>*cerf-volant*</u> ($ABCD$) est un quadrilatère convexe dont l'une de ses diagonales (ici (AC)) est axe de symétrie de la figure. Il est donc constitué de deux triangles isocèles ((ABD) et (CBD)) ayant en commun le côté opposé [BD] de leurs sommets principaux respectifs A et C. Les deux diagonales (AC) et (BD) sont ainsi perpendiculaires

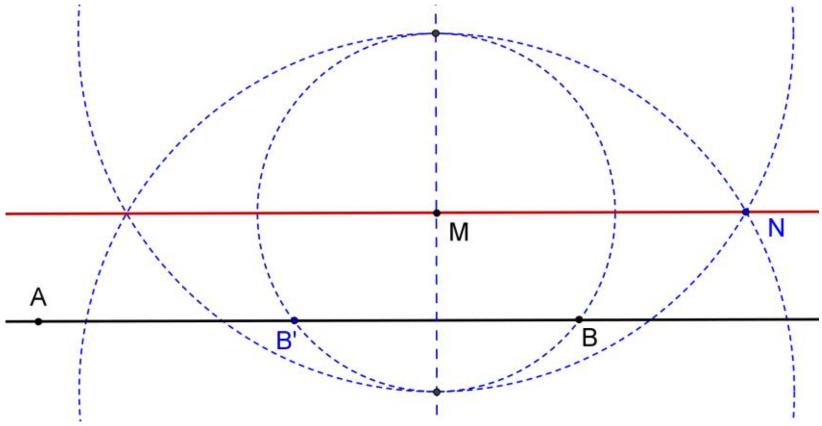


b) Tracer la parallèle à une droite passant par un point.

Données en noir, constructions intermédiaires en bleu, solution en rouge

Construction n°1 :

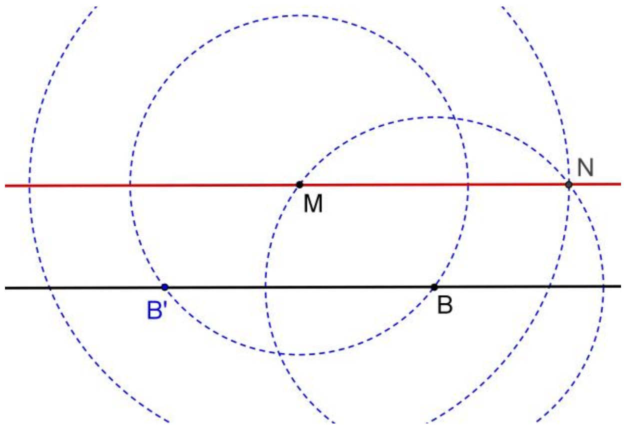
La droite (*D*) est (*AB*), le point est *M*.
On utilise deux fois l'une des constructions précédentes, car une perpendiculaire d'une perpendiculaire à une droite est parallèle à cette droite.
Ainsi on construit la perpendiculaire passant par *M* à la perpendiculaire à (*D*) passant par le point *M*.



Construction n°2 : Mêmes hypothèses.

1. On trace le cercle de centre *M* passant par exemple par *B* (ou encore par *A*),
2. Ce cercle recoupe (*D*) en *B'*,
3. On trace le cercle de centre *M* de rayon la distance entre les points *B* et *B'*,
4. On trace le cercle de centre *B* de rayon la distance entre les points *M* et *B'*,
5. Dans le demi-plan de frontière (*D*) contenant le point *M*, ils se coupent en *N*,
6. La parallèle cherchée est (*MN*).

Propriété utilisée : On a *MN* = *BB'* et *MB'* = *NB*. De plus, le quadrilatère (*MNBB'*) n'est pas croisé (grâce au choix du point *N*), donc c'est un parallélogramme. Donc (*MN*) et (*BB'*) sont parallèles.



c) Tracer la médiatrice de deux points (ou du segment qui les joint).

Données en noir, constructions intermédiaires en bleu, solution en rouge

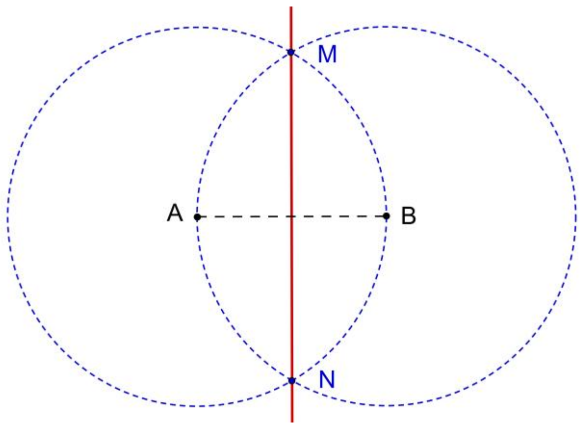
Construction :

Les points sont *A* et *B*, et donc le segment est [*AB*].

1. On trace le cercle de centre *A* passant par *B*,
2. On trace le cercle de centre *B* passant par *A*,
3. Ils se coupent en deux points *M* et *N*,
4. La médiatrice cherchée est (*MN*).

Remarque : Le tracé du segment [*AB*] n'est pas nécessaire.

Propriété utilisée : On a *AM* = *AN* = *AB* et *BM* = *BN* = *BA*.
Donc le quadrilatère (*AMBN*) est un losange.
Donc (*MN*) coupe [*AB*] perpendiculairement en son milieu.



d) Tracer le milieu d'un segment.

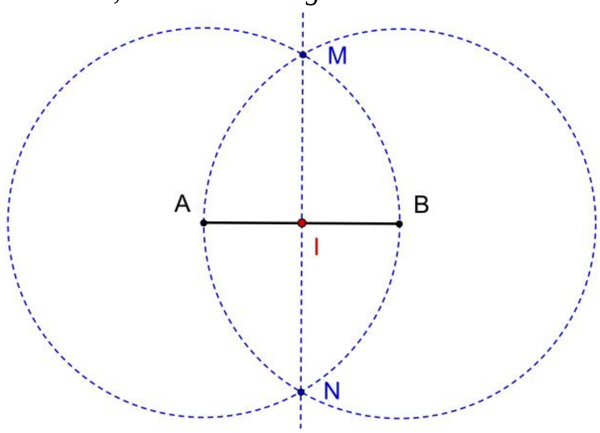
Données en noir, constructions intermédiaires en bleu, solution en rouge

Construction :

Le segment est [*AB*].
Mêmes constructions que précédemment : la médiatrice (*MN*) coupe le segment [*AB*] en son milieu.

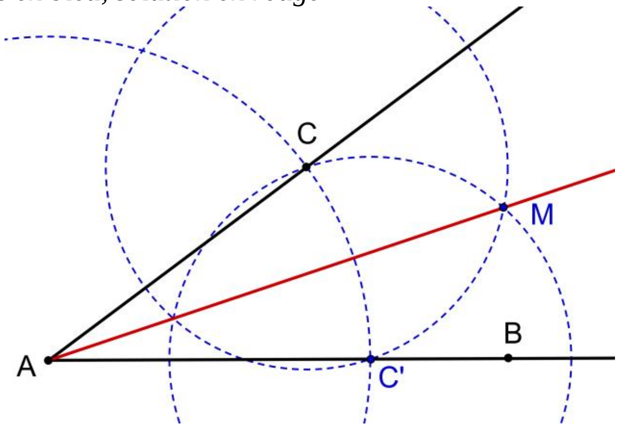
Remarque : Le tracé de la médiatrice du segment [*AB*] n'est pas nécessaire.

Propriété utilisée : Voir construction précédente.



e) Tracer les bissectrices de deux demi-droites de même extrémité.

Données en noir, constructions intermédiaires en bleu, solution en rouge



Construction :

Les deux demi-droites sont [AB) et [AC).

1. On trace le cercle de centre A passant par exemple par C (ou encore par B),
2. Ce cercle coupe [AB) en C',
3. On trace le cercle de centre C passant par C',
4. On trace le cercle de centre C' passant par C,
5. Ils se coupent en deux points, dont l'un est M,
6. La bissectrice cherchée est la droite (AM).

Remarque : on peut aussi définir les bissectrices de deux droites sécantes ; il y en a alors deux, qui sont perpendiculaires.

Propriété utilisée : On a $AC = AC'$ et $CC' = CM = C'M$ donc le quadrilatère ($ACMC'$) est un cerf-volant. Or on sait que les diagonales d'un cerf-volant sont perpendiculaires. Ainsi, (AM) est la hauteur issue de A du triangle (ACC'), isocèle en A. C'est donc aussi la bissectrice issue de A de ce triangle isocèle.

4) Exercices d'application

Les réels, points, droites et cercles nommés sont donnés.
On s'intéressera plus particulièrement aux cas généraux, en citant les exceptions rencontrées.
Il suffira de citer les constructions de base décrites ci-dessus, sans avoir besoin de refaire toutes les descriptions.
On précisera le nombre de solutions trouvées.

E1. Soit (D) et (D'') deux droites sécantes en O. Tracer (D') telle que (D'') soit bissectrice de (D) et (D').

E2. Soit (C) un cercle. Retrouver son centre.

E3. Tracer les tangentes au cercle (C) de centre O, passant par le point A.

E4. Tracer le cercle passant par A et tangent en B à la droite (D).

E5. Tracer un cercle passant par A et B et de rayon R *(distance de deux points donnés)*.

E6. Tracer le cercle passant par A et tangent à deux droites parallèles (D_1) et (D_2).

II) Nombres constructibles

Un nombre est dit ***constructible*** (à la règle et au compas) s'il est l'une des coordonnées, dans un repère orthonormé, d'un point constructible à la règle et au compas.

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(O\,;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$, on considère les points $U(u\,;0)$ et $V(v\,;0)$.

E7. Montrer que si u et v sont constructibles, alors : $u+v$, $u-v$, $u\times v$, $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ le sont aussi (v non nul).

E8. Soit (ABC) est un triangle rectangle en A. Soit D le pied de la hauteur issue de A. Montrer que $AD^2 = DB\times DC$.
On suppose u positif. Utiliser la propriété précédente pour montrer qu'alors $\sqrt{u}$ est aussi constructible.

III) Constructions de polygones réguliers

1) Rappelons qu'un polygone à n côtés est dit <u>*régulier*</u> lorsque ses n côtés ont la même mesure et qu'il est inscriptible dans un cercle. Les angles issus du centre du cercle vers deux sommets adjacents du polygone mesurent tous $\dfrac{360}{n}$ degrés, ou encore $\dfrac{2\pi}{n}$ radians.

Voir le polycopié spécifique « *Les polygones réguliers* » où sont indiquées les constructions à la règle et au compas des polygones réguliers ayant 3, 4, 5, 6, 8 et 10 côtés.

2) Et pour les autres polygones réguliers ? Quelques remarques historiques

On dit qu'un angle est constructible à la règle et au compas s'il peut être considéré comme l'angle polaire d'un point constructible. La construction d'un polygone régulier à n côtés se ramène donc à la « constructibilité » de l'angle $\dfrac{2\pi}{n}$.

Le mathématicien Carl Friedrich Gauss [*allemand, 1777–1855*] a montré en 1801 que, s'il existe deux entiers positifs α et p tels que $n=2^\alpha\left(1+2^{\left(2^p\right)}\right)$, alors $\dfrac{2\pi}{n}$ est constructible.

En fait, on peut ne s'intéresser qu'aux cas où $\alpha = 0$, car on sait construire un polygone régulier de $2k$ côtés quand on sait construire celui de k côtés (voir les exemples ci-dessus).

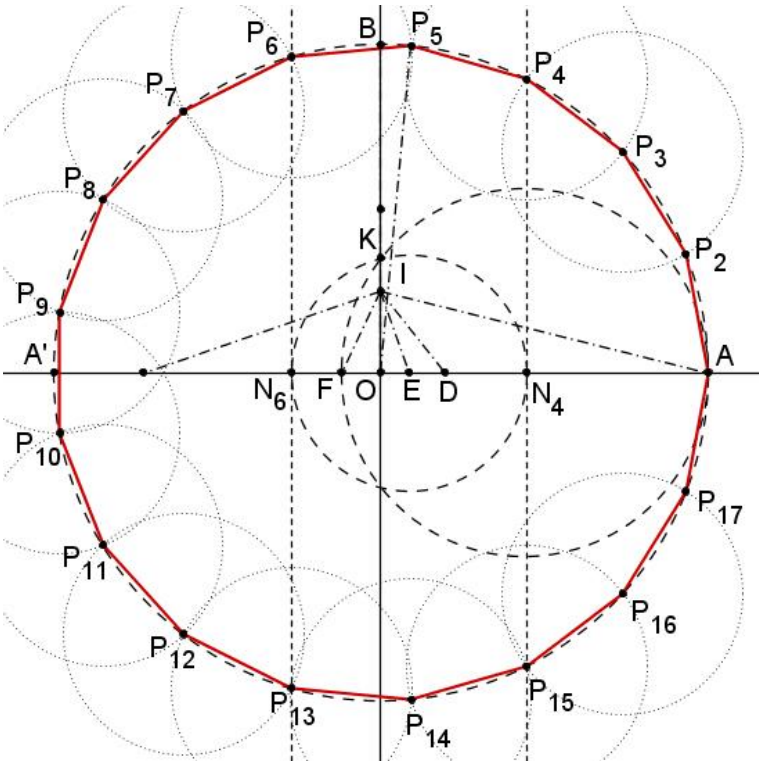
Les nombres de la forme $n = 1 + 2^{\left(2^p\right)}$ s'appellent des ***nombres de Fermat***. [*Pierre de Fermat, français, 1601-1665*]
Pour $p = 1$, on obtient $n = 5$, et pour $p = 2$, on obtient $n = 17$, d'où la « constructibilité » de ces deux polygones.
Pour au plus 20 côtés, on peut construire les polygones réguliers à 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17 et 20.
Les polygones réguliers à 7, 9, 11, 13, 14, 18 et 19 côtés ne sont pas constructibles.
La construction des polygones à 3, 4, 5 et 15 côtés était connue d'Euclide (début du III[e] siècle avant J.-C.).
La construction du polygone à 17 côtés a été découverte par Gauss, en 1796, à l'âge de 19 ans.
Pour information, la formule trouvée par Gauss est :

$$16\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = -1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2\left(-1+\sqrt{17}\right)\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}$$

3) Construction du 17-gone *(Carl Friedrich Gauss)*

Faire avec règle et compas les constructions suivantes :

a) Tracer un cercle (C), de centre O. Soit A et A' deux points diamétralement opposés de (C).
b) Tracer un point B de (C) tel que les droites (OA) et (OB) soit perpendiculaires, puis le point I tel que $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$.
c) Tracer sur [OA] le point E tel que $\widehat{OIE} = \frac{1}{4}\widehat{OIA}$, puis F sur [$A'O$] tel que $\widehat{EIF} = \frac{\pi}{4}$.
d) Tracer le cercle (C'), de diamètre [AF], qui coupe [OB] en K.
e) Tracer le cercle (C''), de centre E et de rayon EK, qui coupe [OA] en N_4 et [$A'O$] en N_6.
f) Tracer les droites parallèles à (OB) passant par N_4 et N_6, coupant respectivement le demi-cercle (ABA') en P_4 et P_6.
g) Tracer la médiatrice de [P_4P_6], qui coupe le demi-cercle (ABA') en P_5.
h) Le cercle de centre P_4 et de rayon P_4P_5 coupe le cercle (C), en P_3 et P_5; le cercle de centre P_3 et de rayon P_4P_5 coupe (C) en P_2 et P_4. Si le dessin est bien fait, le cercle de centre P_2 et de rayon P_4P_5 coupe le cercle (C) en P_3 et en A, que l'on note P_1. On continue ainsi la construction des points P_6, P_7....

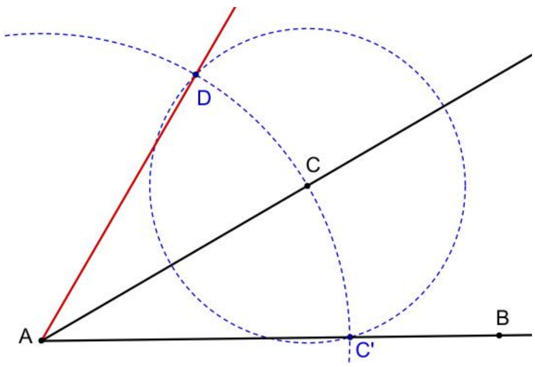


4) Exercice

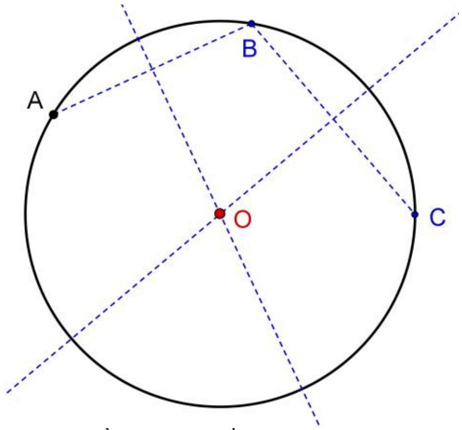
Préciser si la construction suivante est bien celle d'un heptagone régulier (c'est-à-dire d'un polygone régulier à sept côtés) : « *Tracer un cercle (C), puis un triangle équilatéral (ABC) inscrit dans (C). Tracer ensuite le cercle de centre A et de rayon la moitié de AB, qui vient recouper (C) en D. Alors la longueur AD est celle d'un côté d'un heptagone inscrit dans (C).* »

Solutions graphiques des exercices

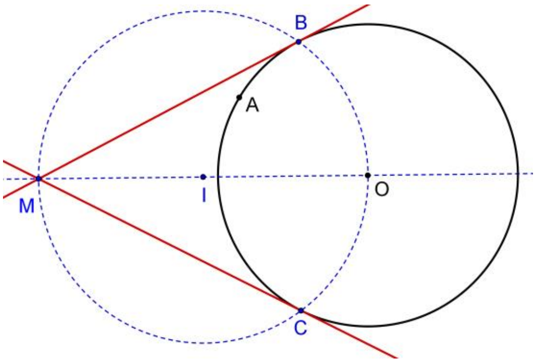
E1



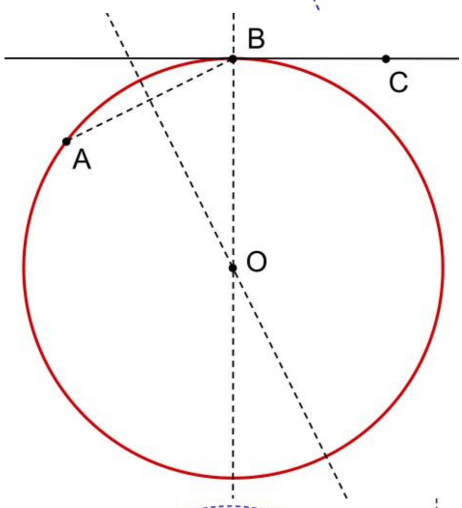
E2



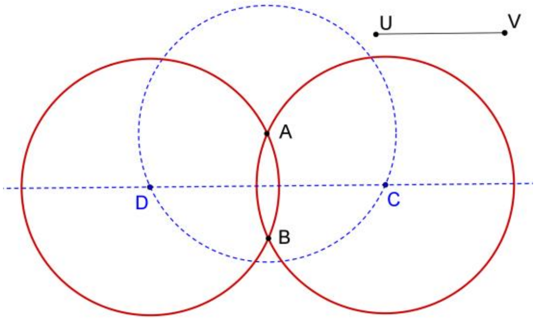
E3



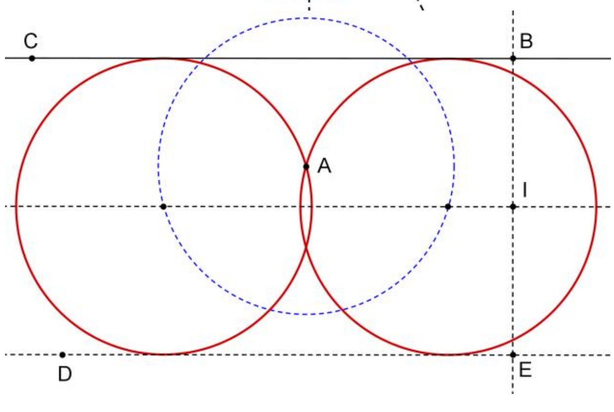
E4



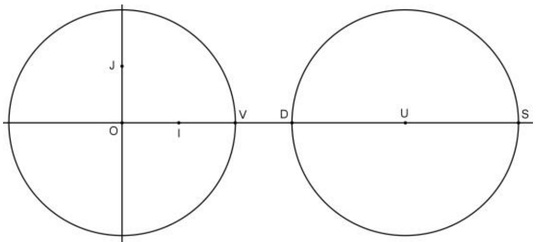
E5

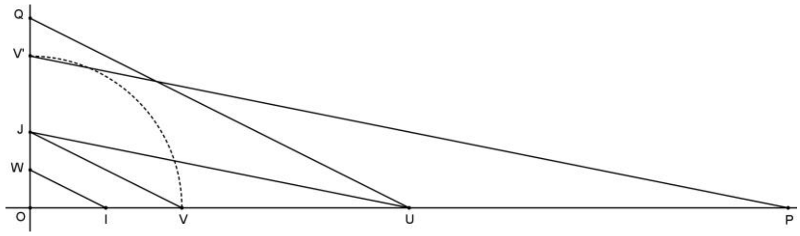


E6

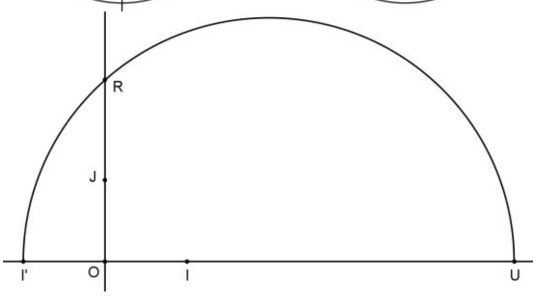


E7





E8



Coordonnées des points :

$I(1\,;0)$, $J(0\,;1)$, $I\,'(-1\,;0)$, $U(u\,;0)$, $V(v\,;0)$,

$V\,'(0\,;v)$, $S(u+v\,;0)$, $D(u-v\,;0)$,

$P(u\times v\,;0)$, $Q\left(\dfrac{u}{v}\,;0\right)$, $W\left(\dfrac{1}{v}\,;0\right)$, $R\left(\sqrt{u}\,;0\right)$

Source principale :

- *Théorie des corps, la règle et le compas,* de J.-C. CARRÉGA, Hermann Editeur