

ÉLÉMENTS DE LOGIQUE

I) Proposition

a) **Définition** : Une proposition est un énoncé ayant un sens et susceptible d'être vrai ou faux sans ambiguïté.

b) **Exemples** :

- « $3 < 2$ » : Faux
- « $4 \geq 4$ » : Vrai
- « 3 divise 12 » : Vrai
- « 91 est un nombre premier » : Faux ($91 = 7 \times 13$)

II) Forme propositionnelle

a) **Définition** : Une forme propositionnelle est un énoncé contenant une (des) variable(s), vrai pour certaines valeurs de la (les) variable(s) et faux pour les autres.

b) **Exemples** :

- La phrase « $3x + 6 \geq 0$ » est vraie pour tous les réels supérieurs ou égaux à -2 , et fausse pour les autres.
- Soit n un entier. On note P_n la forme propositionnelle (f.p. en abrégé) « n est un multiple de 3 ». Par exemple, P_{18} est vraie et P_5 est fausse. On dit que 18 vérifie P et que 5 ne la vérifie pas.

E1 : Soit la f.p. définie sur les réels par P_x : « $|x| = x$ »

Proposer une valeur de x qui vérifie P ,
et une qui ne la vérifie pas.

c) **Remarques** :

- Si on note P_x une f.p. dépendant de la variable x , et si a est une valeur donnée de x , alors P_a est une proposition et P s'appelle une propriété.

E2 : Indiquer les propriétés utilisées à l'exercice E1.

- Une proposition est donc une forme propositionnelle :
– soit toujours vraie (c'est alors une tautologie),
– soit toujours fausse (c'est alors une antilogie).
- Une proposition à qui, par convention, on attribue la valeur « vrai » s'appelle un axiome.
- Les définitions et propriétés qui suivent s'appliquent de la même façon aux propositions et aux f.p.

III) Négation d'une proposition P

Définition : la négation de P , notée $\text{non } P$ ou encore $\bar{P}$, est vraie lorsque P est fausse, et $\text{non } P$ est fausse lorsque P est vraie.

E3 : Préciser les négations des f.p. suivantes :

Dans IR, « $3x + 6 \geq 0$ »	
Dans IN, « n est pair »	

IV) Proposition définie sur un ensemble E

- Soit n un entier positif. On note P_n la forme propositionnelle « n divise 12 ». On note F l'ensemble des entiers vérifiant P_n . On a donc :

$$F = \{ n \in \mathbb{N}, P_n \} = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12 \}$$

$\{ n \in \mathbb{N}, P_n \}$ définit F en compréhension.
 $\{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12 \}$ définit F en extension.

- On peut définir un sous-ensemble F d'un ensemble E par la donnée d'une proposition P , vraie uniquement pour les éléments de F . On dit que P caractérise le sous-ensemble F .
- Par exemple, l'équation $3x + 2y = 5$ caractérise les points d'une droite, dont les coordonnées vérifient cette équation et qui sont les seules à la vérifier.
- Inversement, à tout sous-ensemble F d'un ensemble E donné en extension, on peut associer la f.p. « x appartient à F », et on note « $x \in F$ ».

On a donc : $F = \{ x \in E, P_x \}$.

E4 : Préciser l'ensemble F caractérisé par la f.p. de E1

- Si on note A l'ensemble $\{ x, x \in E, P_x \}$, alors l'ensemble $\{ x, x \in E, \text{non } P_x \}$ est le complémentaire de A dans E et se note $C_E A$ ou encore $\bar{A}$, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble E .

V) Table de vérité

- a) **Définition** : tableau permettant de visualiser les valeurs de vérité (Vrai ou Faux) de plusieurs propositions. On dira que deux propositions sont synonymes ou logiquement équivalentes lorsqu'elles ont même table de vérité. On notera $P \equiv Q$.

b) **P1** : Exemple :

	P	$\text{non } P$	$\text{non}(\text{non } P)$
P et $\text{non}(\text{non } P)$	V	F	V
sont synonymes :	F	V	F

On peut aussi utiliser la notation (qui a l'avantage de ne pas dépendre d'une langue et d'être ainsi internationale) : 1 pour Vrai et 0 pour Faux.

VI) Connecteurs

- a) **Définitions** : À partir de propositions, le langage usuel construit d'autres propositions plus complexes ; pour cela, il utilise des connecteurs.

Intitulé	Nom	Symbole	Ensembles
Disjonction inclusive	« ou »	$P \vee Q$	<u>Réunion</u> $A \cup B$
Disjonction exclusive	« ou bien » ou encore « soit..., soit... »	$P \vee\vee Q$	<u>Différence symétrique</u> $A \Delta B =$ $A \cup B - A \cap B$
Conjonction	« et »	$P \wedge Q$	<u>Intersection</u> $A \cap B$
Implication	« implique » ou encore « si..., alors... »	$P \Rightarrow Q$ $\bar{P} \vee Q$	$\bar{A} \cup B$, où $\bar{A}$ est le complémentaire de A dans E
Équivalence	« si et seulement si »	$P \Leftrightarrow Q$	Complémentaire de $A \Delta B$

b) **Tables de vérité** :

P	Q	$P \vee Q$	$P \vee\vee Q$	$P \wedge Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F
F	F	F	F	F	V	V

E5 : Soit P et Q deux propositions. Dresser la table de vérité de la proposition $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

c) Emploi des connecteurs dans le langage courant :

- Le mot « **ou** » n'a pas le même sens dans les deux phrases suivantes :
 - « *qu'il pleuve **ou** qu'il vente, ne sortez pas !* »
 - « *je partirai lundi **ou** mardi* »
- Le premier « **ou** » est inclusif et le deuxième exclusif, car lundi **et** mardi sont incompatibles (P et Q sont dits incompatibles lorsque $P \wedge Q$ est une antilogie). Le langage courant est parfois imprécis quant à la différence d'utilisation de ces deux « **ou** ».
- De même, la conjonction « **et** » a parfois un autre sens que celui du connecteur :
 - « **et** » a le sens de « **puis** » dans « *je jouerai au volley **et** je me baignerai* »
 - « **et** » a le sens de « **donc** » dans « *il a mangé trop de chocolat **et** il a eu une crise de foie* »
 - « **et** » a bien le sens de « **et** » dans « *pour entrer ici, il faut être majeur **et** membre du club* »
 - « **et** » a le sens de « **ou** » dans « *peuvent entrer ici les personnes majeures **et** les membres du club* »
- Quant à l'implication, symbolisée par l'expression « *si..., alors...* », elle est source de nombreuses erreurs : si l'on comprend facilement que $P \vee Q$ et $P \wedge Q$ sont des propositions créées à partir d'autres, l'implication est souvent comprise et utilisée (à tort) comme un rapport de cause à effet.
- Cela peut venir du verbe « *implique* » qui, contrairement aux conjonctions « **et** » et « **ou** », semble indiquer une conséquence.

- L'expression « P implique Q » fait référence à trois valeurs de vérité : celles de P , celle de Q et celle de $P \Rightarrow Q$. Lorsque l'on fait une erreur, c'est le plus souvent qu'on sous-entend que P est vraie alors que justement, si P est fausse, l'implication est vraie.

- Le fait que « $P \Rightarrow Q$ » soit synonyme de « $(\text{non } P) \vee Q$ » montre bien qu'il s'agit d'un connecteur comme les autres. On le voit bien dans les phrases suivantes : « *Si tu bouges, alors je tire !* » est bien synonyme de « *Ne bouge pas, ou je tire !* ».

d) Propriétés de « ou » et de « et » :

Soit P , Q et R trois propositions quelconques.

- **P2** : $P \vee (\text{non } P)$ tautologie (principe du tiers-exclu)
- **P3** : $P \wedge (\text{non } P)$ antilogie (pr. de non-contradiction)
- **P4** : $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ (distributivité)
- **P5** : $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ (distributivité)

e) P6 : Les lois de Morgan :

$$non(P \vee Q) \equiv (non P) \wedge (non Q)$$

$$\text{non}(P \wedge Q) \equiv (\text{non } P) \vee (\text{non } Q)$$

E6 : Démontrer la loi de Morgan : $\overline{(P \vee Q)} \equiv (\overline{P} \wedge \overline{Q})$

P	Q	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$	$\bar{P}$	$\bar{Q}$	$\bar{P} \wedge \bar{Q}$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

- Ces deux lois sont les équivalents ensemblistes de :

Si A et B sont deux sous-ensembles de E ,

$$C_F(A \cup B) = (C_F A) \cap (C_F B)$$

$$C_E(A \cap B) = (C_E A) \cup (C_E B)$$

- Elles peuvent s'appliquer dans le langage courant :
 - La négation de « *j'achèterai des pommes **et** des poires* » est « *je n'achèterai pas de pommes **ou** pas de poires* ».
 - La négation de « *j'irai à Paris **ou** à Londres* » est « *je n'irai pas à Paris **et** pas à Londres* » (cependant on dirait plus correctement « *je n'irai **ni** à Paris **ni** à Londres* »).

f) Propriétés de l'implication et de l'équivalence

- **P7** : $(P \Rightarrow Q) \equiv ((\text{non } P) \vee Q)$
- **P8** : $(P \Leftrightarrow Q) \equiv ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$
- **P9** : $(P \Rightarrow Q) \equiv ((\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P))$
- $((\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P))$ s'appelle la contraposée de $P \Rightarrow Q$ et lui est synonyme. Elle est parfois utilisée pour des démonstrations.
- En revanche, $Q \Rightarrow P$ est la réciproque de $P \Rightarrow Q$ et ne lui est pas synonyme.
- L'équivalence de deux propositions est très utile dans les démonstrations, en remplaçant une proposition par une proposition équivalente plus facile à démontrer.

E7 : P , Q et R étant trois propositions, montrer, en complétant la table de vérité suivante, que :

$$A : ((P \vee Q) \Rightarrow R) \equiv ((P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)) : B$$

[illegible]

E8 : Déterminer les ensembles suivants :

$A = \{x \in \mathbf{R}, (x \in \mathbf{N}) \Rightarrow (x > 1)\}$	
$B = \{x \in \mathbf{R}, (x \in \mathbf{Z}) \Rightarrow (x \in \mathbf{N})\}$	
$C = \{x \in \mathbf{R}, (x > 1) \Rightarrow (x \in \mathbf{N})\}$	
$D = \{x \in \mathbf{R}, (x \in \mathbf{N}) \Rightarrow (x \in \mathbf{Z})\}$	

VII) Quantificateurs

a) Le quantificateur universel $\forall$:

Lorsqu'on veut indiquer qu'un grand nombre d'éléments vérifient une f.p., au lieu d'écrire : « $P(a)$ et $P(b)$ et $P(c)$ et ... », on peut utiliser le quantificateur universel « *quel que soit* » (ou « *pour tout* »).

En notant E l'ensemble des valeurs vérifiant la f.p.,
on a : « $\forall x \in E, P(x)$ ».

Le symbole est la lettre *A* à l'envers, première lettre de « *all* » (« *tout* » en anglais).

b) Le quantificateur existentiel $\exists$:

La négation de la f.p. « $\forall x \in E, P(x)$ » n'est pas « $\forall x \in E, \text{non } P(x)$ », car si une propriété n'est pas vérifiée par toutes les valeurs d'un ensemble, c'est qu'*il existe au moins* une de ces valeurs qui ne la vérifie pas. On peut définir le quantificateur existentiel « *il existe au moins* », symbolisé par $\exists$, qui est un E à l'envers, première lettre de « *existe* ». Ainsi, on a :

$$(non(\forall x \in E, P(x))) \equiv (\exists x \in E, non P(x))$$

Remarque : Lorsqu'une proposition n'est vérifiée que par un seul élément, on peut utiliser l'expression « *il existe un unique* », symbolisé par $\exists !$!

c) Propriétés :

- **P10** : $\exists x \in E, \text{non } P(x) \equiv \{x, x \in E, P(x)\} \neq E$
- **P11** : $\exists x \in E, P(x) \equiv \{x, x \in E, P(x)\} \neq \emptyset$
- **P12** : $\text{non}(\exists x \in E, P(x)) \equiv \begin{cases} \forall x \in E, \text{non } P(x) \\ \{x, x \in E, P(x)\} = \emptyset \end{cases}$

d) Utilisation commune des deux quantificateurs :

- Dans une f.p. utilisant à la fois $\forall$ et $\exists$, l'ordre des quantificateurs est très important :
 $(\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x + y = 0)$ est vrai : $y = -x$
mais $(\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x + y = 0)$ est faux !

- En fait, le « $\forall x$ » avant le « $\exists y$ » indique que y dépend de x , alors que « $\exists x$ » avant le « $\forall y$ » indique que le x sera le même pour tous les y , et donc ne dépend pas d'eux.

- En revanche, deux $\forall$, ou deux $\exists$ qui se suivent directement peuvent être mis dans un ordre quelconque : $(\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x^2 + y^2 \geq 0)$ et $(\forall y \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + y^2 \geq 0)$ sont synonymes et on peut même l'écrire :

$$(\forall (x; y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}, x^2 + y^2 \geq 0),$$

ou encore $(\forall (x; y) \in \mathbf{R}^2, x^2 + y^2 \geq 0)$

E9 : Déterminer, en justifiant, si les affirmations suivantes sont ou non vérifiées :

$\forall x \in \mathbf{R}, \exists e \in \mathbf{R}, ex = 1$	
$\exists e \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, x + e = x$	
$\forall x \in \mathbf{R}, \exists n \in \mathbf{Z}, n \leq x < n+1$	
$\forall n \in \mathbf{Z}, \exists x \in \mathbf{R}, n \leq x < n+1$	
$\exists n \in \mathbf{Z}, \forall x \in \mathbf{R}, n \leq x < n+1$	
$\exists x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{Z}, n \leq x < n+1$	

E10 : Montrer que la négation, la conjonction, les deux disjonctions, l'implication et l'équivalence peuvent être exprimées en utilisant uniquement la barre de Sheffer $\uparrow$, dite NAND, définie par : $P \uparrow Q \equiv \text{non}(P \wedge Q)$

$\text{non } P$	
$P \vee Q$	
$P \text{ w } Q$	
$P \wedge Q$	
$P \Rightarrow Q$	
$P \Leftrightarrow Q$	

E11 : a) Montrer que les deux propositions :
 $\underbrace{(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)}_{(1)}$ et $P \Rightarrow R$ ne sont pas synonymes.

b) Donner un exemple montrant que les deux propositions ne sont pas synonymes.

[illegible]