

FONCTIONS

Limites

I) Introduction

- On va étudier ici le comportement d'une fonction f , définie sur un ensemble D_f , lorsque x **tend vers** une certaine valeur de D_f ou non, finie ou infinie.
- Si la limite existe, il y a **neuf cas envisageables**, car x peut tendre vers $-\infty$, $+\infty$ ou un réel a , élément de D_f ou non, et alors $f(x)$ peut de même tendre vers $-\infty$, $+\infty$ ou un réel b .
- Mais en fait, les neuf cas peuvent être ramenés à la même définition :

Pour tout intervalle J lié à la limite de $f(x)$, il existe un intervalle I , lié à la limite de x , tel que, pour tout x de D_f , si x est dans I , alors $f(x)$ est dans J .

(Voir le formulaire correspondant)

II) Limites en l'infini

1) Limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$

x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$	$f(x)$ tend vers le réel L
--------------------------------------	------------------------------

a) Définitions

- D1** : L et A désignent des réels, f est une fonction dont l'ensemble de définition contient des intervalles de la forme $I =]A ; +\infty[$.
- On dit que f a pour limite L en $+\infty$ si et seulement si tout intervalle ouvert I contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.
- Notation** : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.
- Traduction mathématique**

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $x > A \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

E1 : Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

- D2** : Définition similaire pour la limite L en $-\infty$ avec $I =]-\infty ; A[$.

b) Unicité de la limite

- P1** : Si une fonction admet une limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$, alors cette limite est unique.

c) Interprétation graphique : asymptote horizontale

- D3** : Soit f une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle du type $]A ; +\infty[$. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, la droite d'équation $y = L$ est dite asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe de f .
- Même définition en $-\infty$ avec $] -\infty ; A[$.
- Remarque** : Pour étudier la position relative de la courbe par rapport à son asymptote, on étudie, sur tout l'ensemble de définition de f , le signe de l'expression $d(x) = f(x) - L$.

E2 : Montrer que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale en $-\infty$ à la courbe d'équation $y = \frac{2x+1}{x+3}$ et étudier leur position relative.

2) Limite infinie en $+\infty$ ou $-\infty$

x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$	$f(x)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$
--------------------------------------	---

- D4** : Soit A et B deux réels et f une fonction dont D_f contient un intervalle du type $]A ; +\infty[$.
- La fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si et seulement si tout intervalle de la forme $]B ; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.

Traduction mathématique

Pour tout $B > 0$, il existe $A > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $x > A \Rightarrow f(x) > B$.

E3 : Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x-1} = +\infty$.

- D5** : Définitions similaires pour les trois autres cas.

E4 : Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - 3x^2) = -\infty$.

III) Limite finie ou infinie en un réel a

1) Limite finie en a

x tend vers a	$f(x)$ tend vers le réel L
-------------------	------------------------------

a) Définition

- D6** : Soit a un réel. Soit f une fonction définie sur un voisinage V de a , c'est-à-dire un intervalle I contenant le réel a , du type $]a - h ; a + h[$, ou encore un voisinage épointé V^* de a , c'est-à-dire la réunion de deux intervalles du type $]a - h ; a[\cup]a ; a + h[$, et soit un réel L .
- La fonction f a pour limite L en a si et seulement si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a .

Traduction mathématique

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $a - \alpha < x < a + \alpha \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

E5 : Montrer que $\lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 = 12$.

b) Unicité de la limite

- P2** : Si une fonction admet une limite finie en a , alors cette limite est unique.

2) Limite infinie en a

x tend vers a	$f(x)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$
-------------------	---

- Définitions** : Soit a un réel et f une fonction non définie en a , mais définie sur $I =]a - h ; a[$ ou $I =]a ; a + h[$ ($h > 0$) ou sur la réunion des deux.
- D7** : f a pour limite $+\infty$ en a si et seulement si tout intervalle de la forme $]A ; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a .
- D8** : Idem pour la limite $-\infty$ en a avec un intervalle de la forme $] -\infty ; -A[$.
- Interprétation graphique : asymptote verticale**
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$, la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f .

E6 : Montrer que la courbe d'équation $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ admet une asymptote verticale. Préciser son équation.

3) Limites à droite et à gauche en a

a) Restriction d'une fonction à un sous-ensemble

- **D9** : Soit f une fonction définie sur un ensemble D et I un sous ensemble de D , la restriction de f à I est la fonction f_I définie sur I par : $\forall x \in I, f_I(x) = f(x)$

b) Limite à droite en a , limite à gauche en a

- **D10** : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a (sauf éventuellement en a).
- La limite à droite en a de f est la limite de sa restriction à $I \cap]a; +\infty[$.
- On la note $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.
- La limite à gauche en a de f est la limite de sa restriction à $I \cap]-\infty; a[$.
- On la note $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

c) Limite, limite à gauche et limite à droite

- **P3** : Soit f une fonction définie sur un ensemble du type $]a-h; a[\cup]a; a+h[$, avec $h > 0$, et la notation l désignant soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.
- Alors : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = l$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = l$
- **Remarque** : Ce type d'étude se fait lorsqu'il est **nécessaire de distinguer** les cas où x tend vers a en lui étant inférieur ou supérieur, mais aussi lorsque la fonction est définie par ses restrictions sur les intervalles qui forment son ensemble de définition. On parlera alors de fonction définie par raccordement.

IV) Calcul de limites

1) Opérations sur les limites (Voir polycopié)

2) Limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fonction polynôme ou d'une fonction rationnelle

- **P4** : La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ est celle de son terme de plus haut degré. La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou $-\infty$ est celle du quotient de ses termes de plus haut degré.
- Il est ici possible d'appliquer directement cette propriété, ou bien factoriser le(s) terme(s) de plus haut degré, de simplifier si nécessaire et de montrer que les expressions entre parenthèses tendent vers 1.

E7 : Déterminer, avec et sans l'utilisation de la **P4**, les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions définies par :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 3x^2 - 4x + 1 & f_2(x) &= \frac{x^2 - x + 1}{x + 2} \\ f_3(x) &= \frac{x^3 + 2x}{2x^3 + 1} & f_4(x) &= \frac{x^2 - x}{x^3 + 1} \end{aligned}$$

3) Limite de la composée de deux fonctions

a) Composée de deux fonctions

- **D11** : Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et g une fonction définie sur un intervalle J tel que, pour tout x élément de I , $f(x)$ appartienne à J .
- Alors $g \circ f$ est la fonction définie sur I telle que, pour tout $x \in I$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

b) Limite de la composée de deux fonctions

- **P5** : a, b et c désignant des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$, si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = c$, alors $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$

E8 : Déterminer les limites aux bornes des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \sqrt{x^2 + x - 2} \qquad f_2(x) = \left(\frac{3x^2 + x}{-2x + 1} \right)^3$$

4) Théorèmes de comparaison

- a) **P6** : Soit a un réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$. Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage épointé I de a , ou sur un intervalle I de la forme $]b; +\infty[$ ou $]-\infty; b[$.

- Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ et pour tout x de I distinct de a , on a : $f(x) \geq g(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ et pour tout x de I distinct de a , on a : $f(x) \leq g(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

b) Compatibilité avec l'ordre pour des limites finies

- **P7** : a désigne un réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$. Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage éventuellement épointé de a , ou sur un intervalle I de la forme $]b; +\infty[$ ou $]-\infty; b[$. Soit L et L' deux réels. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L'$ et pour tout x de I , distinct de a , on a $f(x) \geq g(x)$, alors $L \geq L'$.

c) Théorème d'encadrement ou « des Gendarmes »

- **P8** : a désigne un réel (resp. $+\infty$ ou $-\infty$). Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant a sauf éventuellement en a (resp. sur un intervalle I de la forme $]b; +\infty[$ ou $]-\infty; b[$).

Soit l un réel. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$ et pour tout x de I distinct de a , on a : $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$.

E9 : Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

V) Limites avec la fonction exponentielle

• P9 : Limites aux bornes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

• P10 : Croissance comparée

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

- **P11** : Autre limite importante : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

E10 : Déterminer les limites aux bornes de leurs ensembles de définition des fonctions définies par :

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= e^x - x & \text{b) } f(x) &= \frac{e^x - 3}{e^x + 3} & \text{c) } f(x) &= \frac{e^x - 1}{x^2} \\ \text{d) } f(x) &= e^{2x} - e^x & \text{e) } f(x) &= x e^x - 1 \end{aligned}$$