

LOGARITHME NÉPÉRIEN

I) Définition

1) Rappel

- Pour tout réel k **strictement positif**, l'équation $\exp x = k$ a une unique solution dans $\mathbf{R}$.
- On dit que la fonction exponentielle réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x; \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \right[=]0; +\infty[$ et admet une fonction réciproque, de $]0; +\infty[$ vers $\mathbf{R}$.

2) Définition

- D1** : La fonction réciproque de $\exp$ est appelée fonction logarithme népérien ; elle est manuscrite $\ln$ (mais imprimée **ln**) et est définie de $]0; +\infty[$ vers $\mathbf{R}$.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$ et pour tout $y \in \mathbf{R}$,
 $y = \ln(x)$ si et seulement si $x = \exp(y)$

E1 : Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles les expressions suivantes ont un sens :

- a) $\ln(6-4x)$ b) $\ln|3x-5|$ c) $\ln(x^2)$ d) $\frac{3\ln x + 1}{2\ln x - 1}$
e) $\ln(3-x) + \ln(x-2)$ f) $\ln(x-3) + \ln(2-x)$
g) $\ln(x-3) + \ln(x-2)$ h) $\ln(x^2 - 3x + 2)$
i) $\ln\left(\frac{1-x}{x+2}\right)$ j) $\ln(e^x + 1)$ k) $\ln(e^{-x} - 1)$

3) Conséquences

- P1** : Pour tout $x > 0$ et tout y , $y = \ln x \Leftrightarrow x = \exp y$
- P2** : $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$
- P3** : Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $e^{\ln x} = x$
- P4** : Pour tout $y \in \mathbf{R}$, $\ln(e^y) = y$

II) Propriétés algébriques de la fonction $\ln$

Pour tout réel $x > 0$, et pour tout réel $y > 0$:

- P5** : $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ • **P6** : $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$
- P7** : $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ • **P8** : $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln x$
- P9** : Pour tout entier relatif n , $\ln(x^n) = n\ln x$

E2 : Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:

$$a = \ln(64) ; b = \ln\left(\frac{1}{216}\right) ; c = \ln\left(\frac{32}{27}\right) ; d = \ln\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

E3 : Écrire sous une autre forme :

$$\begin{aligned} a &= -4\ln 2 + 3\ln 4 - \frac{\ln 8}{2} & b &= 8\ln(2e^3) \\ c &= \ln(2e^x) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^{4x}}{4}\right) & d &= \ln(4e^{-5}) - 2\ln(2e^3) \\ f &= \ln\left(\sqrt{3e^6} \times (5e^{-2})^4\right) & g &= \ln(e^x + 1) - \ln(e^{-x} + 1) \end{aligned}$$

E4 : Montrer que les nombres suivants sont des entiers :

$$a = -\exp(-\ln(1/2)) \quad b = \ln(\sqrt{e^4}) ;$$

$$c = e^{\ln 5} + e^{-\ln 9} - e^{-2\ln 3} \quad d = e^{\frac{1}{2}\ln 8} \times e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$f = \ln(e^x + 1) - \ln(e^{-x} + 1) - x$$

- Remarque** : Si a et b sont deux réels de même signe, c'est-à-dire si $a \times b > 0$, alors :

$$\ln(a \times b) = \ln|a| + \ln|b| \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln|a| - \ln|b|$$

Donc, si $a < 0$ et $b < 0$, $\ln(a \times b) = \ln(-a) + \ln(-b) \dots$

En particulier, si a est un réel non nul, $\ln(a^2) = 2\ln|a|$.

III) Étude de la fonction logarithme népérien

1) Dérivabilité de la fonction $\ln$

- Remarque** : La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbf{R}$ et sa dérivée ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$, donc sa courbe dans un repère orthonormé admet en chacun de ses points une tangente qui n'est évidemment pas parallèle à l'axe des ordonnées, mais pas non plus parallèle à l'axe des abscisses.
- Par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$, la courbe de la fonction $\ln$ admet en chacun de ses points une tangente qui n'est donc pas parallèle à l'axe des ordonnées, ce qui traduit que la fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$. De plus, comme la tangente n'est pas parallèle à l'axe des abscisses, la dérivée de la fonction $\ln$ ne s'annule pas.

- P10** : La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$

$$\text{et pour tout réel } x > 0, \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

E5 : Soit un réel $a > 0$.

- a) Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse a à la courbe d'équation $y = \ln x$.
b) Déterminer pour quelle valeur de a la tangente correspondante passe par l'origine.

- P11** : $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
- P12** : Si x et y strictement positifs, $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$
- P13** : $\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$
- P14** : $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- P15** : $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

E6 : Résoudre les équations suivantes :

- a) $\ln(2x-5) = k$ b) $\ln(x^2-4) = \ln(2x-1)$
c) $(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$ d) $\ln(-2x+7) - \ln(4x-9) = -\ln 3$

E7 : Résoudre les inéquations suivantes :

- a) $\ln(x-8) \leq 0$ b) $\ln(2+x) + 1 < 0$
c) $2\ln(3-x) + 1 > 0$ d) $\ln(3x) + \ln(x-1) \geq \ln 6$

2) Limites concernant la fonction $\ln$

a) Limites aux bornes de l'ensemble de définition

- **P16** : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

b) Limites en lien avec un taux de variation

- **P17** : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

- **Conséquence** : Pour h « proche de 0 », $\ln(1+h) \approx h$.

c) Croissance comparée

- **P18** : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = 0$

- **E8** : Déterminer les limites aux bornes des fonctions :

$$f(x) = x - 2 \ln x \quad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x \ln x} \quad h(x) = e^{-x} \ln x$$

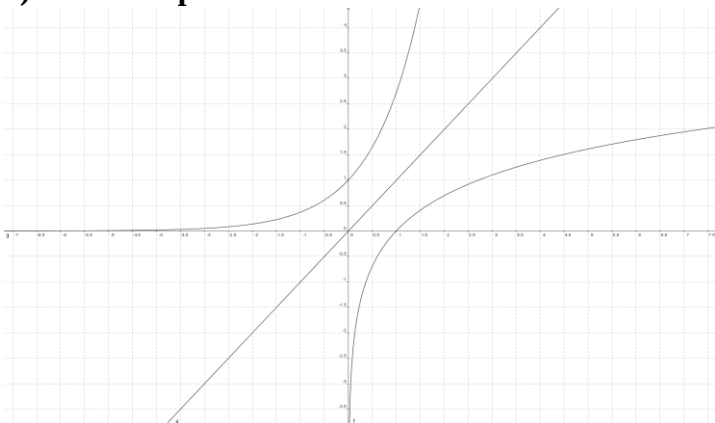
$$i(x) = \sqrt{x} \ln x - x \quad j(x) = \frac{1}{x} \ln(e^x + 1)$$

3) Tableau de variation

x	0	1	$+\infty$
$\ln' x = \frac{1}{x}$		+	
$\ln$	$-\infty$	0	$+\infty$

x	0,1	0,5	1	2	e
$\ln x$					
x	3	4	5	10	100
$\ln x$					

4) Courbe représentative



- **E9** : Étudier les fonctions f définies par :

$$a) \ln x + \frac{1}{x} \quad b) \frac{1+2\ln x}{x} \quad c) \frac{1}{\ln x} \quad d) \frac{\ln x}{x}$$

- **Remarque** : Si M est le point de coordonnées $(a; e^a)$ sur la représentation graphique de la fonction $\exp$, alors, en posant $b = e^a$, ses coordonnées peuvent s'écrire $(\ln b; b)$.

M est donc le symétrique du point N de coordonnées $(b; \ln b)$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.

- **Conséquence** : Les courbes des fonctions $\ln$ et $\exp$, réciproques l'une de l'autre, sont donc symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

E10 : a) Soit a et b deux réels strictement positifs.

$$\text{Montrer que : } \frac{\ln a + \ln b}{2} \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

b) Donner une conséquence graphique de cette inégalité.

5) Dérivée de la fonction $\ln u$

- **P19** : Soit u une fonction définie, dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I . Alors :

La fonction $\ln \circ u$ est dérivable sur I et $(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$

- **P20** : Soit u une fonction définie, dérivable et **ne s'annulant pas** sur un intervalle I . Alors :

La fonction $\ln \circ |u|$ est dérivable sur I et $(\ln \circ |u|)' = \frac{u'}{u}$

E11 : Déterminer la dérivée des fonctions f telles que :

$$a) \ln(x^2 + 1) \quad b) \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \quad c) \ln(e^x - 1)$$

$$d) \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad e) \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)$$

On n'oubliera pas de déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité de f .

IV) Problème réciproque

1) Résolution de $f(u \times v) = f(u) + f(v)$

- **P21** : Si f est une fonction définie sur $]0; +\infty[$, les propositions suivantes sont équivalentes :
 - f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel $u > 0$ et pour tout réel $v > 0$, $f(u \times v) = f(u) + f(v)$
 - il existe un réel k tel que, pour tout réel $x > 0$, $f(x) = k \ln x$

- **Remarque (pour information)** : On distingue habituellement les solutions (autres que la fonction nulle) de cette équation, non pas par la constante k , mais par la valeur du réel, noté ici a , tel que $f(a) = 1$.

- Ainsi, on a : $f(a) = k \ln a = 1$, donc $k = \frac{1}{\ln a}$, et donc f vérifie : Pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$.

- La fonction est appelée fonction logarithme de base a .

2) Cas particulier important : $a = 10$

- **D2** : On appelle fonction logarithme décimal, la fonction notée $\log$, définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\text{Pour tout } x > 0, \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

- **Exemples** : $\log 1 = 0$; $\log 10 = 1$; $\log 100 = 2$ et pour tout entier n , $\log(10^n) = n$
- **Une utilisation classique** : Le **pH** d'une solution : $pH = -\log[H_3O^+]$, où $[H_3O^+]$ est la concentration d'ions H_3O^+ , exprimée en moles par litre.