MATRICES

I) Les matrices en général

1) Définition

D1 : Soit *n* et *p* deux entiers strictement positifs.
Une « *matrice $n \times p$* » est un tableau de nombres, contenant *n* lignes et *p* colonnes.
« $n \times p$ » s'appelle sa *dimension* ou encore son *format*.

Remarque : On indique le nombre de lignes **en premier**.
Procédé mnémotechnique : LIN-COL (du nom du président américain Abraham Lincoln)

Notation : On peut utiliser un « double indice ».
Par exemple a_{23} représente le nombre à l'intersection de la deuxième ligne et de la troisième colonne.

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3p} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{1\le i\le n\,;\,1\le j\le p}$$

E1 : Déterminer les matrices $n \times p$ notées $\left(a_{i,j}\right)$ telles que, pour tous entiers *i* compris entre 1 et *n* et *j* compris entre 1 et *p*, on a :

a) *n* = 3, *p* = 4 et $a_{i,j} = i + j$

b) *n* = 4, *p* = 3 et $a_{i,j} = 1$ si $j = i + 1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

c) *n* = 3, *p* = 3 et $a_{i,j} = \begin{cases} j & \text{si } i = j \\ 2i & \text{si } i < j \\ i - j & \text{si } i > j \end{cases}$

d) *n* = 4, *p* = 4 et $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ i+1 & \text{si } i < j \\ j - 2 & \text{si } i > j \end{cases}$

2) Cas particuliers – vocabulaire

- **Matrice-ligne** (ou **vecteur ligne**) : c'est une matrice qui ne contient qu'une seule ligne (donc 1 × *p*)
- **Matrice-colonne** (ou **vecteur colonne**) : c'est une matrice qui ne contient qu'une seule colonne (*n* × 1)
- **Matrice carrée** : c'est une matrice qui a autant de lignes que de colonnes (donc *n* = *p*). On dit qu'elle est d'ordre *n*, lorsque c'est une matrices *n* × *n*
- **Matrice diagonale** : c'est une matrice **carrée** dont tous les termes situés en dehors de la diagonale principale (celle issue du coin supérieur gauche et allant vers le coin inférieur droit) sont nuls.
- **Matrice scalaire** : c'est une matrice **diagonale** dont tous les termes qui sont situés sur la diagonale principale sont égaux.
- **Matrice unité** : c'est une matrice **scalaire** dont tous les termes situés sur la diagonale principale sont égaux à 1. On la note I_n.
- **Matrice nulle** : c'est la matrice dont tous les termes sont nuls.
- **Matrice triangulaire supérieure** : c'est une matrice carrée dont tous les coefficients en dessous de la diagonale principale sont nuls.
Définition similaire pour triangulaire inférieure.
- **Matrice strictement triangulaire supérieure** : c'est une matrice carrée dont tous les coefficients de la diagonale principale et en dessous sont nuls.
Définition similaire pour inférieure.

E2 : Donner un exemple de chacune des matrices suivantes : 4×2, 2×5, colonne d'ordre 3, ligne d'ordre 2, carrée d'ordre 4, diagonale d'ordre 3, scalaire d'ordre 2, unité d'ordre 5, triangulaires…

3) Opérations sur les matrices

a) Addition

On ne peut additionner que deux matrices de même dimension « $n \times p$ », en ajoutant les coefficients de même position. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 3-3 \\ -4+1 & 0+4 \\ 1+2 & -2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

L'addition de matrices est une opération commutative, c'est-à-dire que, si *A* et *B* sont deux matrices de même dimension, *A* + *B* = *B* + *A*.

b) Multiplication avec un réel

Toute matrice peut être multipliée par un réel, en multipliant chaque coefficient par ce réel.

Par exemple : $3\times\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3\times 2 & 3\times 4 & 3\times(-1) \\ 3\times 5 & 3\times(-2) & 3\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 & -3 \\ 15 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

E3 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & 9 & -2 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.
Calculer 2*A* + 5*B*.

Remarque : Une matrice scalaire de dimension *n*, dont tous les termes de la diagonale principale valent *k*, peut donc s'écrire $k \times I_n$.

P1 : Si *A*, *B* et *C* sont trois matrices, et si *k* et *k*' sont deux réels, on a :

- *k*(*A* + *B*) = *kA* + *kB*
- (*A* + *B*) + *C* = *A* + (*B* + *C*), qu'on écrira *A* + *B* + *C*
- *kA* + *k'A* = (*k* + *k'*)*A*
- *k*(*k'A*) = (*kk'*)*A*

c) Multiplication de deux matrices

- On ne peut calculer *A* × *B*, où *A* est une matrice « $n \times p$ » et *B* une matrice « $n' \times p'$ » que si ***p* = *n'***, et le produit sera alors de dimension « $n \times p'$ ».

- La méthode de multiplication est la suivante :
  Le nombre se trouvant à l'intersection de la ligne *l* et de la colonne *c* dans la matrice-produit sera la somme des produits des nombres de la ligne *l* de la première matrice et de ceux de la colonne *c* de la deuxième.
- En d'autres termes, sur un exemple : on multiple ici une matrice 4×2 par une matrice 2×3. Le résultat sera donc une matrice 4×3. Le nombre se trouvant à l'intersection de la 3^e^ ligne et de la 2^e^ colonne est :

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \\ \boldsymbol{31} & \boldsymbol{32} \\ 41 & 42 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 11 & \boldsymbol{12} & 13 \\ 21 & \boldsymbol{22} & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \boldsymbol{31\times12+32\times22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Retenir : « horizontalement » avec la matrice de gauche et « verticalement » avec celle de droite.

Remarque : Il est possible, pour faciliter le calcul, de présenter l'opération sous la forme ci-contre :

$$\begin{array}{cc} & (B) \\ (A) & (A\times B) \end{array}$$

E4 : Calculer $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \\ 0 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

E5 : Soit *A* et *B* deux matrices.
On suppose que la matrice $A\times B+2A$ existe.
Montrer qu'alors la matrice *B* est carrée.

E6 : On considère les matrices suivantes :

$A=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Déterminer, parmi les opérations proposées ci-après, celles qui sont réalisables et celles qui ne le sont pas.
On donnera le résultat lorsque l'opération est réalisable.

1) $3B-2C$ 2) $B\times C$ 3) C^2
4) $A\times D$ 5) $D\times A$ 6) $C\times A$

P2 : Si *A*, *B* et *C* sont trois matrices telles les opérations suivantes puissent exister, alors on a :

- $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$
- $A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$
- $(A+B)\times C=(A\times C)+(B\times C)$

Remarques :

- Ces formules sont identiques à celles existant avec les réels. Cependant, il faudra bien respecter la cohérence des objets en présence : Par exemple, si *A* et *B* sont deux matrices carrées de même dimension, l'expression $A\times B+2A$ peut être factorisée (à gauche !) par *A*, mais le résultat est $A\times(B+2I)$, où *I* est la matrice identité, et non « $A\times(B+2)$ », qui n'a pas de sens.
- On ne peut calculer le produit des deux matrices *A* et *B* « dans les deux sens », c'est-à-dire calculer à la fois $A\times B$ et $B\times A$, que si *A* est une matrice $n\times p$ et *B* une matrice $p\times n$. La matrice $A\times B$ sera alors une matrice carrée $n\times n$ et la matrice $B\times A$ sera une matrice carrée $p\times p$.
- Pour pouvoir évoquer la possibilité d'avoir $A\times B = B\times A$, il faut donc que $n = p$, c'est-à-dire uniquement avec les matrices carrées.
- On ne peut, en particulier, calculer le carré d'une matrice que si c'est une matrice carrée.

P3 : Cependant, la multiplication des matrices carrées **n'est pas commutative**.

E7 : Preuve de la non-commutativité de la multiplication de matrices grâce à un contre-exemple :
Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

- Il y a cependant de nombreux cas (dont certains intéressants) où le produit de matrices carrés dans les deux sens donne le même résultat.
  Par exemple, le produit d'une matrice carrée quelconque avec une matrice scalaire, ou encore le produit d'une matrice carrée par elle-même ou même l'une de ses puissances.
- En particulier, cas indispensable : si *M* est une matrice carrée et *I* est la matrice unité de même format, alors :

$$M\times I = I\times M = M$$

E8 : Donner un exemple (autre que les cas cités précédemment) de deux matrices qui commutent *i.e.* dont les multiplications dans les deux sens donnent le même résultat.

E9 : On considère les deux matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer alors les matrices suivantes :
$A\times B$, $B\times A$, A^2, B^2, A^2-B^2 et $(A+B)\times(A-B)$.

P4 : Une autre propriété algébrique des réels n'est pas vérifiée par les matrices : Le produit de deux matrices peut être la matrice nulle sans qu'aucune des deux matrices ne le soient :

E10 : Soit $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice *D* non nulle telle que $C\times D = D\times C = 0$.

4) Inverse d'une matrice carrée (dite inversible)

D2 : Si *A* est une matrice **carrée** d'ordre *n* et s'il existe une matrice *B* telle $A\times B=B\times A=I_n$ où I_n est la matrice unité d'ordre *n*, alors on dit que la matrice *A* est <u>*inversible*</u> et la matrice *B* est appelée <u>*matrice inverse*</u> de *A* et est notée A^{-1}.

Remarque : On démontre et nous l'admettrons qu'il suffit de prouver l'une des deux égalités (par exemple $A \times B = I_n$), l'autre égalité ($B \times A = I_n$) étant alors toujours vérifiée.

- On verra plus loin une formule donnant directement l'inverse d'une matrice carrée inversible 2 × 2.
  Pour les dimensions supérieures, le résultat sera donné par la calculatrice.

E11 : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2.
b) Montrer que A n'est pas inversible.
c) Montrer que la matrice $I - A$, où I est la matrice unité d'ordre 3, admet une matrice inverse de la forme $I - cA$, avec c un réel à déterminer.

E12 : Montrer que si A est une matrice carrée inversible, alors on a :

a) Si $A^3 = A$, alors $A^2 = I$ b) $\left(A^{-1}\right)^2 \times A^3 = A$

E13 : Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^3 et montrer alors que A est inversible. Préciser A^{-1} en fonction de A, puis son expression numérique.

5) Résolution de systèmes linéaires

Un système linéaire de n équations à p inconnues s'écrit :

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1p}\, x_p = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2p}\, x_p = b_2 \\ \vdots \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots \vdots \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \ldots + a_{np}\, x_p = b_n \end{cases}$$

Où les $n \times p$ réels $\left(a_{ij}\right)_{1 \le i \le n,\, 1 \le j \le p}$ sont donnés, ainsi que les n réels $\left(b_i\right)_{1 \le i \le n}$. On cherche les p réels $\left(x_j\right)_{1 \le j \le p}$.

Avec $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$,

le système peut s'écrire : $M \times V = B$.

Si la matrice M est carrée (*i.e.* si $n = p$), alors, si de plus la matrice M est inversible, la solution sera $V = M^{-1} \times B$.

E14 : Résoudre le système suivant grâce aux matrices et à la calculatrice pour trouver la matrice inverse.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y - z = 11 \\ 2x + 5y - 5z = 13 \end{cases}$$

E15 : On cherche à déterminer trois réels a, b et c tels que la parabole d'équation $y = a\,x^2 + b\,x + c$ passe par les trois points $A(1;1)$, $B(-1;-1)$ et $C(2;5)$.

a) Traduire l'énoncé sous la forme d'un système, puis en donner une écriture matricielle.
b) Répondre alors au problème posé.

E 16 : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) *On pourra dans cette question écrire directement les résultats donnés par la calculatrice.*
Calculer les matrices A^2 et $A^2 - 3A$.
2) a) En déduire que la matrice A est inversible et exprimer sa matrice inverse A^{-1} comme une combinaison linéaire de A et de I.
b) Déterminer explicitement la matrice A^{-1}.
3) On considère le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} y - z = 4 \\ -x + 2y - z = 0 \\ x - y + 2z = -2 \end{cases}.$$

a) Écrire ce système sous forme matricielle.
b) Résoudre alors (S) grâce aux questions précédentes.

II) Le cas des matrices « 2 × 2 »

- Dans le cas d'une matrice de 2 lignes et 2 colonnes, de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, il est possible (et même conseillé car plus rapide) de chercher si elle est inversible sans faire usage de la calculatrice
- On forme pour cela son <u>*déterminant*</u>, noté :

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

  On reconnaîtra l'expression utilisée en Géométrie pour étudier la colinéarité de deux vecteurs.
- Une <u>condition nécessaire et suffisante</u> d'existence de l'inverse est donc : $ad - bc \neq 0$.
- La matrice inverse est alors :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

  On remarquera que, outre l'inverse du déterminant en facteur, la matrice obtenue permute les coefficients de la diagonale principale (a et d) et on change les signes des coefficients de l'autre diagonale (b et c).

E17 : On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.
2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \ge 1$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & -n \times 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

3) Préciser, en justifiant, si on peut étendre cette propriété aux entiers $n = 0$ et $n = -1$?