MATRICES, SUITES & PROBABILITÉS

I) Suites récurrentes

Différents types de suites définies par des relations de récurrence se ramènent à l'étude d'une suite de matrices colonnes (X_n) vérifiant une relation de récurrence du type $X_{n+1} = A \times X_n + B$, où A est une matrice carrée et B une matrice-colonne.

1) Cas où *B* est la matrice nulle

P1 : Si une suite de matrices-colonnes (X_n) vérifiant une relation de récurrence du type $X_{n+1} = A \times X_n$, où A est une matrice carrée, alors pour tout entier naturel *n*, $X_n = A^n \times X_0$.

E1 : ***Exemple : Suites récurrentes d'ordre 2***
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel *n* : $u_{n+2} = 0{,}4u_{n+1} + 0{,}6u_n$

On définit la matrice-colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que la relation ci-dessus s'écrit alors :

$$X_{n+1} = A \times X_n$$

où A est une matrice carrée d'ordre 2.

b) Conjecturer avec la calculatrice la limite de A^n lorsque *n* tend vers l'infini, et la limite de (u_n).

D1 : La suite de matrices (X_n) telle que $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, converge lorsque les suites (u_n) et (v_n) convergent.

Plus généralement, on dit que la suite de matrices-colonnes (X_n) de taille *p* est convergente lorsque les *p* suites formées par les termes correspondant à la même ligne convergent.
La limite de cette suite est alors la matrice-colonne formée des *p* limites ainsi obtenues.

2) Cas général

P2 : Si une suite de matrices colonnes (X_n) vérifiant une relation de récurrence du type

$$X_{n+1} = A \times X_n + B$$

converge, alors sa limite *X* est une matrice-colonne vérifiant l'égalité : $X = A \times X + B$.

P3 : Soit *I* la matrice identité de même taille que la matrice carrée *A*.
Si la matrice $I - A$ est inversible, alors pour toute matrice colonne *B* (de même taille que *A*), il existe une unique matrice *X* telle que $X = A \times X + B$.
En effet, cette égalité peut s'écrire :

$$X - A \times X = B, \qquad \textit{i.e. } I \times X - A \times X = B,$$
$$\textit{i.e. } (I - A) \times X = B, \qquad \textit{i.e. } X = (I - A)^{-1} \times B.$$

Conséquence : Si une suite de matrices colonnes (X_n) vérifiant une relation de récurrence du type $X_{n+1} = A \times X_n + B$ converge, alors sa limite *X* ne dépend pas de l'état initial X_0.

P4 : Si la matrice $I - A$ n'est pas une matrice inversible, alors on admettra que :

- soit il n'existe aucune matrice-colonne *X* vérifiant $X = A \times X + B$ et la suite (X_n) ne peut être convergente.
- soit il existe une infinité de matrices colonnes *X* vérifiant $X = A \times X + B$ dont l'une est éventuellement la limite de la suite (X_n).

E2 : ***Exemple : Suites à récurrences simultanées***
Soit deux suites (u_n) et (v_n) définies par :
$u_0 = 5$, $v_0 = -2$, et pour tout entier naturel *n*,
$u_{n+1} = 0{,}6\,u_n - 0{,}2\,v_n + 1$ et $v_{n+1} = 0{,}3\,u_n - 0{,}3\,v_n + 4$.

a) Soit $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Vérifier qu'il existe une matrice carrée *A* d'ordre 2 et une matrice colonne *B* telles que les relations de récurrence ci-dessus s'écrivent :

Pour tout entier naturel *n* , $X_{n+1} = A \times X_n + B$.

b) On admet la convergence des suites (u_n) et (v_n).
Déterminer leurs limites.

II) Marche aléatoire – Matrice de transition

D2 : On considère la variable aléatoire X_n prenant les valeurs *A* ou *B* à l'étape *n*. On rappelle que *A* et *B* s'appellent les <u>*états*</u> de X_n.
Par exemple, $X_3 = B$ signifie que la voiture est dans l'agence *B* à la fin de la troisième journée.

La suite de variables aléatoires (X_n) est appelée <u>*marche aléatoire*</u> sur l'ensemble des issues $\{A, B\}$, c'est-à-dire : l'état du processus à l'étape *n* + 1 ne dépend que de celui à l'état *n*, mais non de ses états antérieurs.

D3 : Dans le cas d'une marche aléatoire à p états, on appelle <u>*matrice de transition*</u> des états, la matrice carrée d'ordre p dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est la probabilité de transition du sommet i vers le sommet j, ou encore la probabilité d'arriver en j sachant qu'on est parti de i.

Remarque : Les probabilités de transition du 1er sommet vers chacun des sommets du graphe constituent la première ligne de la matrice, les probabilités de transition du 2^{e} sommet vers chacun des sommets du graphe constituent la deuxième ligne, etc.

D4 : La somme des coefficients de chaque ligne est donc égale à 1 : on dit que la matrice T est une matrice <u>*stochastique*</u> selon les lignes.

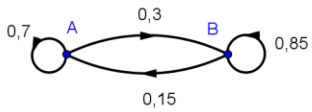
P5 : Pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1} = U_n \times T \text{ et } U_n = U_0 \times T^n .$$

P6 : Si une marche aléatoire à p états, de matrice de transition T, converge, alors la suite (U_n) converge vers U vérifiant $U \times T = U$.

E3 : Une entreprise de location de voitures propose de louer des voitures à la journée.
Elle possède deux agences A et B dans lesquelles un client peut indifféremment déposer en fin de journée le véhicule loué le matin.
On constate que : 70 % des voitures qui ont été louées à l'agence A le matin sont rendues en A, les autres étant restituées à l'agence B, et 85 % des voitures louées à l'agence B sont restituées en B, les autres étant déposées en A.
Les données de l'énoncé peuvent être traduire par le schéma ci-dessous appelé <u>*graphe*</u>.
Les points A et B sont appelés <u>*sommets du graphe*</u>. On appelle <u>*matrice de transition*</u> associée à ce graphe la matrice T :

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{cc} \text{vers } A & \text{vers } B \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{de } A \rightarrow \\ \text{de } B \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} p_A(A) & p_A(B) \\ p_B(A) & p_B(B) \end{pmatrix} \end{array}$$



A) 1) Écrire la matrice de transition T de ce graphe.

2) On choisit au hasard un véhicule dans cette flotte de voitures et on suit ses déplacements au cours du temps. Pour tout n entier naturel, on notera X_n la variable aléatoire donnant l'état du véhicule à la fin de la n-ième journée.
L'état A (respectivement B) étant « le véhicule est dans l'agence A (respectivement B) ».
Pour tout n, on représente par $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la loi de probabilité de X_n.
La loi de probabilité initiale (c'est-à-dire représentant la répartition initiale des véhicules entre les agences A et B) est donnée par $U_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix}$.

a) On note A_n (respectivement B_n) l'événement : « la n-ième journée, le véhicule est dans l'agence A (respectivement B) ». On a donc $A_n = (X = a_n)$ et $p(A_n) = a_n$. Faire un arbre pondéré faisant apparaître les événements A_n, B_n, A_{n+1} et B_{n+1}.

b) En déduire un système permettant d'exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

c) Vérifier que ce système peut s'écrire sous la forme $U_{n+1} = U_n \times T$.

B) 1) On suppose que $U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.
Calculer U_1 et U_2. Que peut-on dire de U_n ?

2) On suppose que $U_0 = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}25 \end{pmatrix}$.

a) Donner, grâce à la calculatrice, les valeurs approchées de U_7, U_{14} et U_{28}.

b) Toujours à l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement des suites (a_n) et (b_n) quand n tend vers $+\infty$. Interpréter.

3) Mêmes questions qu'au 2) avec $U_0 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ puis $U_0 = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.
Quelle conjecture peut-on émettre ?

4) Démonstration de cette conjecture :
Connaitre l'expression de a_n et b_n permettrait de déterminer les limites des suites (a_n) et (b_n).
On a vu que pour tout n, $U_n = U_0 \times T^n$.
Il faut donc calculer T^n, ce qui peut se révéler compliqué. Soit $S = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 \\ 1 & -0{,}15 \end{pmatrix}$.

a) Justifier que S est inversible et calculer $D = S^{-1} \times T \times S$. Que peut-on dire de la matrice D ?

b) Calculer D^n.

c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$T^n = S \times D^n \times S^{-1}$$

d) En déduire les coefficients de T^n puis les limites des suites (a_n) et (b_n).